2024年陕西省普通高等教育专升本招生考试

高等数学

I. 考试范围

普通高等教育专升本招生考试高等数学考试范围包括：函数与极限，　一元函数微分学及其应用，　一元函数积分学及其应用，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程。

II. 考试内容与要求

要求考生全面掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本运算技能，具有本科学习所必需的抽象思维能力、逻辑推理能力、基本运算能力以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。具体要求可分为较高要求(用B　来表示)和一般要求(用A　来表示)两个层次：较高要求需要考生深入理解、牢固掌握、熟练应用，其中概念、理论用“理解”一词表述，方法、运算用“掌握”一词表述；　一般要求也是不可缺少的，只是在要求上低于前者，其中概念、理论用“了解”一词表述，方法、运算用“会”或“了解”表述。

各部分考试内容及具体要求如下：

一 、函数与极限

考试内容

1. 函数的概念及表示法。函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性。反函数、隐函数和复合函数。基本初等函数的性质及其图形。初等函数。简单应用问题中函数关系的建立。

2. 数列极限的定义及性质。函数极限的定义及性质。函数的左、右极限。无穷小与无穷大。无穷小的比较。极限的四则运算。极限存在的夹逼准则和单调有界准则。两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$。

3. 函数连续的概念。函数间断点及其类型。连续函数的和、差、积、商、复合函数、反函数的连续性。初等函数的连续性。闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理，介值定理)。

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数表示法。
2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性。
3. 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形。
5. 会建立简单应用问题中的函数关系。

6. 理解数列极限和函数极限的概念，理解函数的左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系。

7. 掌握极限的性质及四则运算法则。

8. 掌握极限存在的两个准则，并会利用其求极限。

9. 掌握利用两个重要极限求极限的方法。

10. 理解无穷小、无穷大的概念，会无穷小的比较。

11. 掌握用等价无穷小代换求极限的方法。

12. 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型。

13. 会用初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理)解决相关问题。

二、一元函数微分学及其应用

考试内容

1. 导数的概念。导数的几何意义和物理意义。平面曲线的切线和法线。函数可导性和连续性之间的关系。函数和、差、积、商的求导法则。复合函数及反函数的求导法则。隐函数的导数及对数求导法。由参数方程所确定的函数的求导法则。基本初等函数的导数公式。高阶导数的概念。

2. 微分的概念。微分的几何意义。函数可导与可微的关系。微分的四则运算法则。微分形式不变性。

3. 罗尔中值定理。拉格朗日中值定理。柯西中值定理。罗必达法则。

4. 应用导数讨论：函数单调性，函数的极值，函数的最大值和最小值，函数图形的凹凸性、拐点及渐近线，函数图形的描绘，弧微分。

考试要求

1. 理解导数的概念及其几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程。

2. 了解导数的物理意义。

3. 理解函数的可导性与连续性之间的关系。

4. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，会求分段函数和反函数的导数。

5. 掌握基本初等函数的导数公式，了解初等函数的可导性。

6. 理解高阶导数的概念，会求函数的 n 阶导数，掌握隐函数和由参数方程所确定的函数一阶与二阶导数。

7. 理解微分的概念及其几何意义。了解函数可导与可微的关系。

8. 掌握微分的四则运算法则，了解微分形式不变性。

9. 会用罗尔中值定理、拉格朗日中值定理解决相关问题，了解柯西中值定理。

10. 掌握用罗必达法则求未定式极限的方法。

11. 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求单调区间与极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其应用。

12. 会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的凹凸区间和拐点。会求函数图形的水平和铅直渐近线，会描绘函数的图形。

三 、一 元函数积分学及其应用

考试内容

1. 原函数和不定积分的概念 。不定积分的基本性质 。基本积分公式 。不定积分的换元法和分部积分法。有理函数积分法。

2. 定积分的概念。定积分的几何意义和物理意义。定积分的性质。定积分的中值定理。变上限定积分及其导数。牛顿-莱布尼兹公式。定积分的换元积分法和分部积分法。

3. 定积分的应用。

考试要求

1. 理解原函数和不定积分的概念。
2. 掌握不定积分的基本公式和性质。
3. 掌握不定积分的换元法和分部积分法。会求有理函数的不定积分。
4. 理解定积分的概念和几何意义。 了解定积分的物理意义。
5. 掌握定积分的性质，理解定积分的中值定理。
6. 理解变上限定积分是其上限的函数，掌握其求导方法。
7. 掌握牛顿一莱布尼兹公式。
8. 掌握定积分的换元积分法和分部积分法。
9. 掌握用定积分计算平面图形的面积。会用定积分计算旋转体的体积。

四 、 向量代数与空间解析几何

考试内容

1. 向量的概念， 向量的线性运算。两向量的数量积和向量积。两向量的夹角。两向量垂直和平行的条件。

2. 空间直角坐标系。 向量的坐标表达式。单位向量。方向角及其余弦。

3. 平面方程。直线方程。点到平面的距离。平面与平面、直线与直线、直线与平面的相互关系。

4. 空间曲线及曲面。

考试要求

1. 理解向量的概念及其表示，掌握向量的线性运算、数量积和向量积，了解两向量的夹角以及两向量垂直和平行的条件。

2. 理解空间直角坐标系，掌握向量的坐标表达式以及用坐标表达式进行向量运算的方法，掌握单位向量、方向角及其余弦。

3. 掌握平面方程和直线方程及其求法，会求点到平面的距离，会利用直线与平面的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题。

4. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念。 了解常用二次曲面的方程及其图形。

五 、多元函数微分学

考试内容

1. 多元函数的概念。二元函数极限和连续的概念。有界闭区域上连续函数的性质。

2. 偏导数的概念。高阶偏导数的概念。全微分的概念。全微分存在的必要条件和充分条件。多元复合函数、隐函数的求导法。方向导数和梯度的概念。

3. 空间曲线的切线和法平面。曲面的切平面和法线。多元函数的极值。拉格朗日乘数法。多元函数的最大值和最小值。

考试要求

1. 理解多元函数的概念，了解二元函数的极限与连续性的概念，了解有界闭区域上连续函数的性质。

2. 理解偏导数和高阶偏导数的概念。

3. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法，掌握隐函数的偏导数的求法。

4. 理解方向导数和梯度的概念，并掌握其计算方法。

5. 理解全微分的概念，了解全微分存在的必要条件和充分条件。

6. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，并会求它们的方程。

7. 理解多元函数的极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解判定二元函数极值的充分条件，会求二元函数的极值。

六 、多元函数积分学

考试内容

1. 二重积分的概念及性质。二重积分在直角坐标系和极坐标系中的计算。二重积分的应用。

2. 对弧长的曲线积分和对坐标的曲线积分的概念、性质及计算。格林公式。平面曲线积分与路径无关的条件。

考试要求

1. 理解二重积分的概念和性质。

2. 掌握二重积分在直角坐标系和极坐标系中的计算方法。

3. 理解两类曲线积分的概念，了解两类曲线积分的性质。

4. 会计算两类曲线积分。

5. 会用格林公式，会利用平面曲线积分与路径无关的条件计算对坐标的曲线积分。

6. 会用二重积分求一些几何量。

七 、无穷级数

考试内容

1. 常数项级数及其收敛与发散的概念。常数项级数的基本性质及收敛的必要条件。几何级数与 p 级数的敛散性。正项级数的比较审敛法和比值审敛法。交错级数的莱布尼兹定理。常数项级数的绝对收敛与条件收敛的概念。

2. 函数项级数及其收敛域、和函数的概念。幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域。幂级数在其收敛区间内的基本性质。简单幂级数的和函数求法。函数泰勒级数的概念。函数可展开为泰勒级数的充分必要条件。函数幂级数展开的唯一性。e^2, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ 和 $(1+x)^{\circ}$ 的麦克劳林展开式。

考试要求

1. 理解常数项级数及其收敛与发散的概念，理解常数项级数绝对收敛与条件收敛的概念。

2. 会利用数项级数 的基本性质及收敛 的必要条件判别数项级数的敛散性。

3. 掌握几何级数与p 级数的敛散性。

4. 会用正项级数的比较审敛法和比值审敛法。

5. 掌握交错级数的莱布尼兹定理。

6. 了解函数项级数及其收敛域、和函数的概念。

7. 掌握幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域的求法。

8. 理解幂级数在其收敛区间 内的基本性质 。掌握幂级数 的和函数 的求法。

9. 了解函数的泰勒级数的概念以及函数展开为泰勒级数的充分必要条件， 了解函数幂级数展开式的唯一性。

10. 掌 握 e,sinx,cosx,In(1+x) 和 (1 +x)° 的麦克劳林展开式，并会利用它们将函数间接展开为幂级数。

八、常微分方程

考试内容

1. 常微分方程的概念 。微分方程的阶、解 、通解及特解的概念 。初始条件 。初值问题及其特解 。线性微分方程。

2. 变量可分离的微分方程 。 一阶线性微分方程 。可降阶的高阶微分方程。

3. 线性微分方程解 的性质及通解 的结构定理 。 二 阶常系数齐次线性微分方程 的解法 。简单的二阶常系数非齐次线性微分方程 的解法。

4. 微分方程的应用问题。

考试要求

1. 理解微分方程及其阶、解、通解和特解等概念。

2. 了解初始条件、初值问题及初值问题特解的概念。

3. 理解齐次线性微分方程和非齐次线性微分方程的概念。

4. 掌握一阶变量可分离的微分方程和一阶线性微分方程的解法。

5. 了解降阶法解微分方程：y(”=f(x),y”=f(x,y') 和 y"=f(y,y')。

6. 理解线性微分方程解的性质及通解的结构定理。

7. 掌握二阶常系数线性齐次微分方程的解法。

8. 会求解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数的二阶常系数线性非齐次微分方程。

9. 会用微分方程解决应用问题。

Ⅲ. 考试形式及试卷结构

一、考试形式

1．考试采用闭卷、笔试形式。试卷满分150分，考试时间150分钟。

2．试卷采用分卷形式。分卷包括试题和答题卡两部分，考生必须将答案写在答题卡上，写在试题上的答案无效。

二、试题题型

选择题	17%
填空题	17%
计算题	53%
应用题与证明题	13%

三、试题难度

容易题	30%
中等题	50%
较难题	20%

N. 题型示例

一、选择题(在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x\to 0$ 时，无穷小量$1-\cos x^2$是关于无穷小量x^4 的 [B; 易]

A. 低阶无穷小 B. 高阶无穷小

C. 等价无穷小 D. 同阶但非等价无穷小

2. 设函数 f(x) 的定义域为D={x|D≤x≤1}, 则函数$f(x^2)$ 的定义域为 [A; 易]

A.D={x|O≤x≤1} B.D={xl-1<x<1}

C.D={xl-1≤x≤1 D.D={xl-1<x≤1

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0\\ e^x-1, & x\leqslant 0\end{cases}$,则x=0 是 f(x) 的 [A; 易]

A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 无穷间断点 D. 连续点

4. 设函数$f(x)=e^2 x$, 则 f^2020)(x)= [A; 难]

A.22020e-2 B.—22020e-2₂ C.2e-2 D.-2e-2x

5. 设在[0,1]上， f'(x)>0, 则 f(O),f(1),f(1)-f(0) 和 f(0)-f(1) 几个数的大小顺序为 [B; 中]

A.f(l)>f(1)-f(0)>ff0) B.f(1)>f(O)>f(1)-f(O)

C.f(1)-f(O)>f(1)>f(0) D.f(1)>f(O)-f(1)>f(0)

6. 设方程$\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定函数 y=y(x) 则 $\dfrac{dy}{dx}=$ [B; 中]

A. $\dfrac{x-y}{x+y}$ B. $\dfrac{x+y}{x-y}$ C. $\dfrac{y-x}{x+y}$ D. $\dfrac{x+y}{y-x}$

7. 函 数 f(x)=arctanx—x 在其定义域内 [A; 中]

A. 为单调增加函数 B. 为单调减少函数

C. 有极大值 D. 有极小值

8. 函数 y=xe-* 在[-1,2]上的最大值或最小值正确的是 [A; 难]

A. 最小值为e-] B. 最小值为0

C. 最大值为2e-2 D. 最大值为e-1

9. 过点(2,-1,3),并且与直线 $\begin{cases}2x+3y-2z-7=0\\ x-z+8=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为 [B; 中

A.3x-4y+3x-19 =0 B.3x-4y-3x-1=0

C.x+z-5 =0 D.x-x+1=0

10. 已知曲线y=y(x) 过原点，且在任意点切线的斜率为y+1，则该曲线方程为 [A; 中]

A.y=2e⁴-e-*-] B.y=e²-2e*+1

C.y=e⁴-1 D.y=1-e-*

11. 设积分区域 D:$x^2+y^2\le 2$, 则二重积；分 $\iint_D (x+2)\,dxdy$。的值等于 [A; 难]

A. —4π B.—2π C.2π D.4π

12. 设曲线L 的方程是x=acost,y=bsint(a>0,b>0,0≤t≤2π), 则曲线积分

$$\oint_L (b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)\,ds =$$ [B; 中]

A.0 B.πa^3b^3 C.πa^2b D.πa^3b

13. 微分方程 y”-3y’+2y=0 的通解为 [A; 中]

A.Ce+Ce-2 B.Ce²+Cze-2

C.Ce+Ce² D.$C_1e^2+Ce^2$

14. 已知 y=1, y=x 和$y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为 y= [B; 难]

A.$C(x-1)+C_2(x^2-1)+1$ B.$C_1x^2+C2x+C_3$

C.$C_1x^2+C_2x+1$ D.$C_1(x-1)+C_2(x^2-1)$

15. 下列无穷级数中，条件收敛的级数是 [B; 中]

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{1+n^2}$p $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

二、填空题

16. 设 函 数f(x)=2x+1+o(x), 且f (0)=1, 则f (0)= ________ [B; 易]

17. 已知函数 [B; 中]

$$f(x)=\frac{x}{1+x},g(x)=f[f(x)]$$ 则g'(x)= _ .

18. 极限 [A; 易]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=\_\_\_\_\_\_.$$

19. 极限 $\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)=$ ______. [A; 难]

20. 已知函数f(x)=1n(2+x), 则 f³(0)= ________ [B; 易]

21. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}xe^t\,dt$,则 f((x)= [A; 中]

22. 设函数f(x) 具有连续的导数, y=f(e),则 [A; 难]

____

23. 定 积 [B; 难]

$$\frac{dy}{dx}=\_\_\_\_\_\_.$$

$$分\int_{-1}^{1}\left[\sqrt{1-x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]dx=\_\_\_\_\_\_.$$

24. 已知函数 f(x)满足 $f(x)=x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 则 f(x)= ________ [B; 中]

25. 过点(3,—1,4)和y 轴的平面方程为________ [A; 难]

26. 过点(—1,2,0)并且与平面x+y+2x-3=0 垂直的直线方程为________.[B; 易]

27. 设D 是第一象限中由曲线$y=x^2$,x+y−2=0 和y =0 所围成的区域，则二重积分 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________ [B; 中]

28.设二次积分，$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$,则交换积分次序后得I= ________[B;中]

29. 二重积久分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 e^{y^2}\mathrm{d}y=$ ________. [B; 难]

30. 设L 是连接点(2,0)及(0,2)的直线段，则曲线积：分 $\int_L (x+y+1)\mathrm{d}s=$ ________

[A; 中]

31. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n$的收敛半径R = ________ [A; 中]

三、计算题(计算题要有计算过程)

32. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}}{x\ln(1+x^2)}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x 2t^4\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\mathrm{d}t}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{(1-\cos x)\ln(1+x)}$ [B; 中]

33. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)$ [B; 难]

34. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x}{1+x^{2n}}$ 的间断点，并说明其类型. [B; 中]

35. (1) 设参数方程 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 确定函数y=y(x). 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ [A; 易]

(2) 求由方程 $x+y^3=e$ 确定的隐函数 y=y(x) 在 x=0 处的导数。

36. 设函数 $= \left(\frac{1}{1+x}\right)^{x}$ ，求 dy. [A; 易]

37. 计算不定积分 $\int \frac{x^2+3x+8}{(x-2)^3}\mathrm{d}x$. [A; 中]

38. 设函数， $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x < 1 \\ x, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$ ，求函数 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在[0,2]上的表达式，并讨论 Φ(x) 在[0,2]上的连续性. [B; 中]

39. 求不定积久分$\int \frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x$. [A; 中]

40. 求不定积分：

(1) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

(2))) $\int x^3 \ln x^2 \,\mathrm{d}x$ [B; 易]

41. 已知函数f(x) 为可导函数，并且f(x)>0, 满足方程, $f^2(x)=16+\int_0^x \frac{e^x f(x)}{1+e^x}\mathrm{d}x$, 求

f(x). [B; 难]

42. 计算定积分

(1) $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}\mathrm{d}x$

(2) $\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x+|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x.$ [B; 难]

43. 求曲线y=x² -2 x,y=0,x=1 及x=3 所围成的平面图形的面积S，并求该平面图形绕y 轴旋转一周所得旋转体的体积V. [B; 难]

44. 设函数u= √x² +y² +²， 求 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ [B; 中]

45. 设函数≈=f(x^2—y^2,xy): 其 中f(u,v) 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. [B; 难]

46. 设函数F(u, v) 具有连续偏导数，由方程F(cx-az, cy—bz)=0 确定函数≈=≈(x, y)，计算a $\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}$ (其中 a,b,c 为常数). [B; 难]

47. 求曲面$x^2+2y^2-3x^2-3=0$ 上点 Po(2,1,—1) 处的切平面方程. [A; 中]

48. 求函数$f(x, y)=4(x-y)-x^2-y^2$的极值. [B; 中]

49. 计算 $I=\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$. 其中L 为圆周$x^2+y^2=a^2$取逆时针方向.

[A; 难]

50. 计算$\iint_D \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成第一象限内

[A; 难]

51. 判断无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$的敛散性. [A; 中]

52. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$的和函数. [A; 中]

53. 将函数 $f(x)=\frac{x}{x-2}$ 展开成x-1 的幂级数，并确定其收敛区间. [A; 中]

54. 设 f(x) 是连续且二阶可导函数，且满足 $f(x)=e^x-\int_0^x(x-u)f(u)du$,试求函数 *f(x)*. [B; 中]

55. (1) 求微分方程$y''-y=4xe$　满足$y(0)=0,y'(0)=1$　的特解.

(2) 求微分方程$y''-2y'+y=4e^2$　的通解. [A; 中]

四、应用题与证明题(计算要有计算过程，证明要有证明过程

56. 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成图形绕x 轴旋转一周而成的旋转体的体积. [B; 易]

57. 计 算 曲 面 $\approx=x^2+2y^2$ 和 $\times=6-2x^2-y^2$ 所月围成的立体的体积. [B; 中]

58. 设 f(x) 在[0,1]上二阶可导，且f(0)=f(1)，　证明在(0,1)内至少存在一点ξ,使得 f(E)+ξf(G)=0.

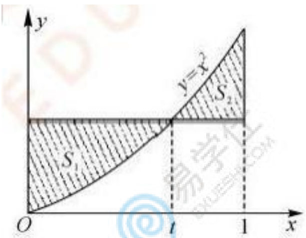
[B; 难]

59. 考虑函数$y=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$,　　问

1)t 取何值时，图中阴影部分的面积S_1 与S_2 之 和$S=S_1+S_2$　　最小;

2)t 取何值时，面积$S=S_1+S_2$　　最大.

[B; 难]



60. 对任意的x_1, xz∈　(一　，+～), 证明不等式$|\sin x—\sin x_2|\leqslant|x_1-x_2|$.

[A; 中]

61. 设函数f(x) 在[a, b] 上连续，函数g(x) 在[a, b] 上可积，且g(x>0, 证明存在 E∈[a, b]，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$ [B;难]

62. 当 O<x<1 时，证明不等式 $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$. [B; 中]

63. 在 x0y 面上求一点，使它到x=0, y=0, x+2y−16=0 三直线的距离平方和为最小 . [A;难]

题型示例参考答案

一 、选择题(在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1.D	2.C	3.B	4.A	5.A	6.B	7.B	8.D
9.C	10.C	11.D	12.A	13.D	14.A	15.B	

二、填空题

16. 2

17. $\dfrac{1}{(1+2x)^2}$

18. 1

19. $-\dfrac{1}{2}$

20. $\dfrac{1}{4}$

21.(1+2x²)e²-1

22.f(e'nr)e·cosx

23. $\dfrac{\pi}{2}$

24.x-1

25.4x-3~=0

26. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-0}{2}$

27. $\dfrac{11}{12}$

28. $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

29. $\dfrac{1}{2}(e-1)$

30. 6 √2

31. 2

三、计算题(计算题要有计算过程)

32．(1)解：原式= lim sinx —tanx
a-0xln(1+x²)(√1+sinx+√1+tanx)

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\tan x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^3}=-\frac{1}{4}$$

(2)解

$$:原式=\lim_{x\to0}\frac{2x^4}{x(x-\sin x)}.$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^3}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{6x^2}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{12x}{\sin x}=12$$

(3) 解:原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\frac{1}{2}x^2\cdot x}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

33．解

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\arctan\frac{1}{x}\right)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\frac{1}{x}\right)=\pi+\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$\therefore$原式 $=\frac{\pi}{2}$

34. 解：$\because f(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 1, & x=-1\\ 1-x, & -1<x\leqslant 1\\ 0, & 1\leqslant x\end{cases}$

且 $\lim_{x\to -1^-}f(x)=0$，$\lim_{x\to -1^+}f(x)=2$

$\therefore$x =-1 是 f(x) 的跳跃间断点。

35. (1)解：$\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\sec^2 t\cdot\frac{1}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$$

(2)解：方程两边对x 求导得1+3y² y' =e(y+xy')

所以 $y'=\frac{ye^{xy}-1}{3y^2-xe^{xy}}$

当 x=0 时 y=1，代 入 得y'(0)=0

36. 解：∵y=e-ln(x+1}

$$\therefore dy=e^{-x\ln(x+1)}\left(-\ln(1+x)-\frac{x}{x+1}\right)dx$$

37. 解：原式 $=\int\frac{(x-2)^2+7x+4}{(x-2)^3}dx$

$$=\int\frac{(x-2)^2+7(x-2)+18}{(x-2)^3}dx$$

$$=\ln|x-2|-\frac{7}{x-2}-\frac{9}{(x-2)^2}+C$$

38. 解：当0≤x<1 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^2 dt=\frac{1}{3}x^3$

当1≤x≤2时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt$

$$=\int_0^1 t^2 dt+\int_1^x t dt=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}$$

所以 $\Phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1\\[2ex] \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

又因为f(x) 在[0,2]上连续，故积分上限函数φ(x) 在[0,2]可导，从而φ(x) 在[0,2]上连续.

39. 解：原式 $=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\dfrac{x^2}{9+x^2}dx^2=\dfrac{1}{2}\int\left(1-\dfrac{9}{9+x^2}\right)dx^2$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{2}\ln(9+x^2)+C$$

40. (1) 解：原式 $=2\displaystyle\int\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}=2\int\arctan\sqrt{x}\,d\arctan\sqrt{x}$

=(arctanvx)^2+C

(2) 解：原式 $=\dfrac{1}{4}x^4\ln x^2-\dfrac{1}{4}\displaystyle\int x^4\cdot\dfrac{2x}{x^2}dx$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x^2-\frac{1}{2}\int x^3dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x^2-\frac{1}{8}x^4+C$$

41. 解：两边求导有

$$2f(x)f'(x)=\frac{e^xf(x)}{1+e^x}$$

∵ffx)#0

$$\therefore f'(x)=\frac{e^x}{2(1+e^x)}$$

两边积分有

$$f(x)=\int\frac{e^x}{2(1+e^x)}dx=\frac{1}{2}\ln(1+e^x)+C$$

又∵f(O)=4

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^x}{2}+4$$

42. (1)解：原式 $=\displaystyle\int_0^\pi$ Isinc llcosr |dr

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin^2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1$$

(2) 解：原式 $=\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{x\cos x}{1+x^2}dx+\int_{-1}^{1}\dfrac{|x|}{1+x^2}dx$

$$=0+2\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\ln 2$$

43. 解：面积 $S=S_1+S_2=\int_1^2(2x-x^2)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx=2$

S_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_1=\pi\int_{-1}^{0}(1+\sqrt{1+y})^2dy-\pi=\frac{11}{6}\pi$$

S_2 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_2=27\pi-\pi\int_0^3(1+\sqrt{1+y})^2dy=\frac{43}{6}\pi$$

所以所求体积为 $V=V_1+V_2=9\pi$.

44. 解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\therefore\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$$

45. 解：设 $u=x^2-y^2,v=xy$, 则 ≥ =f(u, v).

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y=2xf'_u+yf'_v$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[f''_{uu}\cdot(-2y)+f''_{uv}\cdot x]+f'_v+y[f''_{vu}\cdot(-2y)+f''_{vv}x]$$

=-4xyf'+(2x²-2y²)fm+xyf'+f?

46. 解：设fx.y,z)=F(cx—az,cy-bz)

∵jp=cFl,fj=cF²f=-aF{-bF₂,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z}=\frac{cF'_1}{aF'_1+bF'_2},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_z}=\frac{cF'_2}{aF'_1+bF'_2},$$

$$\therefore\quad a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{acF'_1}{aF'_1+bF'_2}+\frac{bcF'_2}{aF'_1+bF'_2}=c$$

47. 解：设F(x,y.z)=x²+2y²-3x²-3

F'1=2xl=4 F1=4yl。=4 Fl。=(-6~)|。=6

所求切平面方程为 4(x-2)+4(y-1)+6(z+1)=0

即 2x+2y+3z-3=0

48. 解：$\because\frac{\partial f}{\partial x}=4-2x\quad\frac{\partial f}{\partial y}=-4-2y$

得f(x,y) 的驻点 Po(2,-2)

又 $\because\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2$

:ACB=42X-2)-0=4~=0 y=-2-24

从而 f(x, y) 在(2,-2)处取得极大值 f(2,-2)=8

49. 解：令

$$P=\frac{x+y}{x^2+y^2},Q=-\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

易知$x^2+y^2\neq0$, 故作顺时针方向圆周

$$l:x^2+y^2=r^2(r<a)\Leftrightarrow\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},0\leqslant\theta\leqslant2\pi,$$

应用格林公式,

$$I=-\oint_l\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{[(r\cos\theta+r\sin\theta)\times(-r\sin\theta)-(r\cos\theta-r\sin\theta)\times r\cos\theta]}{r^2}d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta=-2\pi.$$

50. 解：原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{\ln(1+r^2)}{1+r^2}\cdot rdr$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+r^2)d\ln(1+r^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln^2(1+r^2)\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln^2 2$$

51. 解：$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}=3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{e}>1$$

所以由正项级数比值判别法得原级数发散.

52. 解：设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$,

有 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\qquad|x|<1$$

从而

$$S'(x)=\int_0^x S''(x)dx+S'(0)$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx$$

$=-\ln(1-x)|$ $x<1$

$$S(x)=\int_0^x S'(x)dx+S(0)$$

$$=-\int_0^x\ln(1-x)dx$$

$=x+(1-x)\ln(1-x)$ $|x|<1$

53. 解：$f(x)=\frac{x-2+2}{x-2}$

$$=1-\frac{2}{1-(x-1)}$$

$$=1-2\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n \quad |x-1|<1$$

54. 解

$$f(x)=e^x-x\int_0^x f(u)du+\int_0^x uf(u)du$$

$$f'(x)=e^x-\int_0^x f(u)du$$

$f''(x)=e^2f(x)$,

得方程 $f''(x)+f(x)=e^x$，其通解 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$

由初始条件 $f(0)=1$ $f'(0)=1$, 得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$

所以 $f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$.

55. (1) 解：特征方程 $r^2-1=0$, 特征根 $r_1=1$ $r_2=-1$

设特解为 $y^*=x(ax+b)e$

求导数 $y^1=(ar^2+2ax+bx+b)e$

$y^{*''}=(ax^2+4ax+bx+2a+2b)e$

代入方程得 $4ax+2a+2b=4x$,

得 $a=1,b=-1$.

方程通解为 $y=Ce^2+Cze-+(x^2-x)e^4$

由 $y(0)=0$ 得 $C+C_2=0$

由 $y(0)=1$ 得 $C_1-C_2-1=1$

从而 $C=1$ $C_2=1$

所求特解为 $y=e-e-*+(x^2-x)e^2$

(2) 解：原方程对应的齐次方程为 $y''-2y^3+y=0$

其特征方程为 $r^2-2r+1=0$,

特征根为 $r_1=r_2=]$

齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)e$

设原方程的特解为 $y^*=Ax^2e$,

将其代入原方程得 $A=2$,

$y^*=2x^2e2$

原方程的通解为 y=Y +y° =(C+Czx) e² +2x² e

四、应用题与证明题(计算题要有计算过程，证明要有证明过程)

56. 解: $V=\int_{-a}^{a}\pi(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2\mathrm{d}x$

$=2\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x$

$=2\pi b^2\left(a-\frac{1}{3}a\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2$

57. 解：曲面方程联立，解得积分区域 D$x^2+y^2\leqslant 2$

$V=V_1-V_2=\iint\limits_D(6-2x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D(x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=3\iint\limits_D(2-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)r\mathrm{d}r$

$=6\pi(r^2-\frac{1}{4}r^4)\Big|_0^{\sqrt{2}}$

=6 π

58. 证：对x) 在[0,1]上应用Rolle 定理，得至少存在一点$6_1\in(0,1)$,使得

f(st)=0, 对F(x)=xf(x) 在[0,5i]上应用Rolle定理得至少存在一点

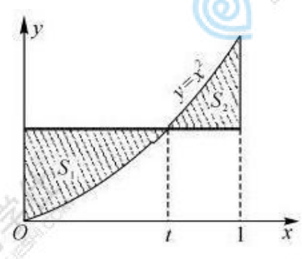
ξ∈(0,G)C(0,1), 使 得F'(G)=0

而F” (x)=f (x)+xf” (x)

从而存在ξ∈(0,1),使f(e)+ξf(ξ)=0

59.解: $S_1=t^3-\int_0^t x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t^3$

$S_2=\int_t^1 x^2\mathrm{d}x-(1-t)t^2=\frac{2}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$



(O≤t≤1)

$S=S_1+S_2=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$

S'(t)=4t²-2t =0, 得(0,1)内驻点 $t=\frac{1}{2}$

∵ $S(0)=\frac{1}{3}$ $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ $S(1)=\frac{2}{3}$

∴当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$S=S_1+S_2$ 最小；

当 t=1 时，$S=S_1+S_2$ 最大.

60. 证：当$x_1=x_2$ 时，显然成立

当$x_1 \neq x_2$ 时，对$f(x)=\sin x$ 在$[x_1,x_2]$ 或$[xz,x_1]$ 上应用lagrange 中值定理，

得至少存在一点ξ介于x_1 与 x_2 之间，使

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)$$

而f(ξ)=cosξ，|cosξ 1≤1

从而 $\left|\frac{\sin x_1-\sin x_2}{x_1-x_2}\right| \leqslant 1$ 即 |sinxr-sinx₂≤|xr-x₂1

61. 证：∵f(x) 在[a,b] 上连续

∴f(x) 在[a,b] 上取得最大值M 和最小值m,

即$m \leq f(x) \leq M$, 又因g(x)>0,

故有 $\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x.$

即 $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

又$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$,

故 $m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M$,

由闭区间上连续函数的介值定理知存在ξ∈[a,b],

使 $\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = f(\xi)$,

从而 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

62. 证： 设f(x)=1-x-(1+x)e²x (O≤x≤1)

f(x)=-1+(1+2x)e-

f'(x)=-4xe-2r

∵在(0,1)内f'(x)<0 ∴在[0,1]上f(x) 单调递减

即在[0,1]上有f(x)<f(0)=0

又∵在(0,1)内f(x)<0 ∴在[0,1]上f(x) 为单调递减

即在[0,1]上有f(x)<f(0)=0

从而在(0,1)内，有f(x)<0

即 1- x<(1+x)e-2x

即 $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$

3. 解：aOy面上点(x,y)到三直线的距离分别为x|, ly|, $\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}$

故目标函数为 $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y-16)^2$，

解方程组 “-$\begin{cases} f_x=2x+\frac{2}{5}(x+2y-16)=0 \\ f_y=2y+\frac{4}{5}(x+2y-16)=0 \end{cases}$

可得驻点 $\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$，由于最小值一定存在，且又有唯一驻点，故其必为最小值点，

即 $\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$为所求.

V.2024 年陕西省普通高等教育专升本招生考试(样题)

机密★启封并使用完毕前

姓名		准考证号		座位号	

高 等 数 学

注意事项:

1. 考生领到试题后，须按规定在试题上填写姓名、准考证号和座位号。

2. 所有答案必须按照题号在答题卡上对应的答题区域内作答，超出各题答题区域的答案无效。在草稿纸、试题上作答无效。考试结束后，将试题和答题卡一并交回。

3. 满分为150分，考试时间为150分钟。

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{x^2(x-1)}$ 的间断点的个数是

A.3　　B.2　　C.1　　D.0

2. 过点 $M_1(3,-2,1)$、$M_2(-1,0,2)$ 的直线方程是

A. $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$

B. $\frac{x+3}{-4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$

C. $-4(x-3)=2(y+2)=z-1$

D. $-4(x+3)=2(y-2)=x+1$

3. 微分方程 $y''=\cos x$ 的通解是

A. $y=-\mathrm{COS}x+C_1x+C$

B. $y=-\mathrm{Sin}x+Cx+C_2$

C. $y=\cos x+Cx+C$

D. $y=\sin x+C_1x+C_2$

4. 设函数 $f(x)=(x-1)$, 则

A. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极值，点(1,0)是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

B. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极值，点(1,0)不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

C. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不取极值，点(1,0)是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不取极值，点(1,0)不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. 下列级数中发散的是

A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5^n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

C., $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。

6. 极限 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x\cos^2 t\,dt}{x^3}=$ ________

7. 设函数y=y(x) 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 所确定，则 $\frac{dy}{dx}$气 ________

8. 函数f(a)在x=0处连续，且f(0)=0, f(0)=2, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=$ ________

9. 已知连续函数 f(x) 满足f(a)=e+1+ $\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx$, 则 tvy- ________

10. 设 L 是 左 半 圆 周 $x^2+y^2=$ 3(x≤0), 则 曲 线 积 分 $\int_L(x^2+y^2-4)ds=$

____

三、计算题：本大题共10小题，每小题8分，共80分。计算题要有计算过程。

11. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$

12. 设函数y=y(x) 由方程 $x^2-y^2=1$ 所确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

13. 求不定积分 $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$.

14. 计算定积分; 久分 $\int_0^1\arctan\sqrt{x}\,dx$.

15. 设函数 $u=f(y\sin x,x^2)+y^2\ln x$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial y}$ 和

16. 求函数 $f(x,y,z)=xy^2+z^2-xyz$ 在 点P(1,1,2) 处沿从点P(1.1.2) 到 点Q(3,2

4) 的方向的方向导数.

17. 计算二重积分 $I=\iint_D(e^{y^2}+3x)dxdy$., 其中闭区域 D 为: O≤x≤1, x≤y≤1.

18. 计算对坐标的曲线积分 $I=\oint_L (x^2+y+2)dx+(2y-3x)dy$,,其中L是椭圆$x^2+\frac{y^2}{4}$

=1, L　的方向为逆时针方向.

19. 将函数, $f(x)=\frac{1}{2+x}$展开成x　的幂级数.

20. 求微分方程y” +y′ −2y=4x　　−8　的通解.

四、应用题与证明题：本大题共2小题，每小题10分，共20分。应用题的计算要有计算过程，证明题要有证明过程。

21. 证明不等式 $\sin(x+\frac{1}{2})-\sin x| \leqslant \frac{1}{2}$.

22. 求由曲线$y=x^2$　与直线$y=x+2$　所围成的平面图形的面积S, 并求由该平面图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体的体积V.

202年陕西省普通高等教育专升本招生考试(样题)
高等数学答案及评分参考

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。

1.B　　2.A　　3.A　　4.C　　5.D

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。

$e^{\frac{1}{3}}$　　7. $\frac{\sin t}{1-\cos t}$　　8. 4

9.e²+2Ve　　10. $-\sqrt{3}\pi$

三、计算题：本大题共10小题，每小题8分，共80分。计算题要有计算过程。

11. 解：

当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，（4分）

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}$$

$=2.$（8分）

12. 解：

方程两边对x　求导，得

$$2x-2y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

解得（4分）

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}.$$

则（8分）

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y^2}=\frac{y-x\cdot\frac{x}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}$$

13. 解：

$$原式=\int\frac{\mathrm{d}(1+\ln x)}{(1+\ln x)^2}$$（4分）

$$=-\frac{1}{1+\ln x}+C.$$（8分）

14. 解：

令　$\sqrt{x}=t$，　则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$ $t\in[0,1]$，（2分）

$$原式=\int_0^1\arctan t\cdot 2t\mathrm{d}t$$

$$= t^2\arctan t\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt$$ (4分)

$$= \frac{\pi}{4} - (t - \arctan t)\Big|_0^1$$ (6分)

$$= \frac{\pi-2}{2}.$$ (8分)

15. 解：

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \cdot f'_1 + 2y\ln x,$$ (4分)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \cos x \cdot f'_1 + \sin x \cdot (y\cos x \cdot f''_{11} + 2xf''_{12}) + \frac{2y}{x}$$

$$= \cos x \cdot f'_1 + y\sin x\cos x \cdot f''_{11} + 2x\sin x \cdot f''_{12} + \frac{2y}{x}.$$ (8分)

16. 解：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - yz,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - xz,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - xy$$

gradf(1,1,2)=(-1,0,3), (4分)

i=PQ=(2,1,2), 单位向量 $\vec{l}^{\circ} = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ (6分)

所以 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1,2)} = -1\times\frac{2}{3} + 0\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$ （8 分

17. 解：

闭区域 D 为 0≤y≤1,0≤x≤y, ， 则

$$I = \int_0^1 dy\int_0^y (e^{y^2} + 3x)dx$$ (4分)

$$= \int_0^1 ye^{y^2}dy + \frac{3}{2}\int_0^1 y^2dy$$ (6 分)

$$= \frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e}{2}.$$ (8分)

18. 解：

令 $P = x^2 + y + 2, Q = 2y - 3x, D: x^2 + \frac{y^2}{4} \leqslant 1,$ (2 分)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -3$$ (4 分)

由格林公式得

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

（6分）

$$=\iint_D(-3-1)\,dx\,dy$$

$=-4\times2\pi \qquad =-8\pi.$ （8分）

19. 解：

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$ （4分）

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n\quad\left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\right)$$ （6分）

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}x^n\quad(-2<x<2)$$ （8分）

20. 解：

对应齐次方程的特征方程为 $r^2+r-2=0$, （2分）

特征根为 r=-2,rz=1,

则 对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-2}x+Cze^2$。 （4分）

设原方程的特解形式为 y*=ax+b,

代入原方程得 a=−2, b=3,

即原方程的一个特解为 y*=−2x+3. （6分）

故原方程的通解为 $y=C_1e-2x+C_2e^2-2x+3$. （8分）

四、应用题与证明题：本大题共2小题，每小题10分，共20分。应用题的计算要有计算过程，证明题要有证明过程。

21. 证明

令 f(t)=sint （3 分）

在$\left[x,x+\frac{1}{2}\right]$上应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in\left(x,x+\frac{1}{2}\right)$ 使得

$$f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f(x)=\frac{1}{2}f'(\xi),$$ （6分）

即 $\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)-\sin x=\frac{1}{2}\cos\xi,$ （8分）

因 $||\cos\xi\leq1,$

故 $\left.\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)-\sin x\right|=\frac{1}{2}|\cos\xi|\leqslant\frac{1}{2}.$ （10分）

22. 解：

曲线$y=x^2$ 与直线$y=x+2$ 的交点为(−1,1)和(2,4)， （2 分）

则平面图形的面积

$$S=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\mathrm{d}x \qquad (4分)$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}. \qquad (6分)$$

旋转体的体积

$$V=\int_{-1}^{2}(\pi(x+2)^2-\pi x^4)\mathrm{d}x \qquad (8分)$$

$$=\pi\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+4x-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{72\pi}{5}. \qquad (10分)$$