2002-2010年江苏专转本高等数学真题(附答案)

江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、下列各极限正确的是 （　　）

A、$\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x = e$　　B、$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = e$　　C、$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$　　D、$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 1$

2、不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ （　　）

A、$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　B、$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+c$　　C、$\arcsin x$　　D、$\arcsin x + c$

3、若 $f(x) = f(-x)$，且在 $[0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$、$f''(x)>0$，则在 $(-\infty,0)$ 内必有 （　　）

A、$f'(x)<0, f''(x)<0$　　B、$f'(x)<0, f''(x)>0$

C、$f'(x)>0, f''(x)<0$　　D、$f'(x)>0, f''(x)>0$

4、$\int_0^2 |x-1|dx =$ （　　）

A、0　　B、2　　C、-1　　D、1

5、方程 $x^2+y^2=4x$ 在空间直角坐标系中表示 （　　）

A、圆柱面　　B、点　　C、圆　　D、旋转抛物面

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6、设 $\begin{cases} x = te^t \\ y = 2t+t^2 \end{cases}$，则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} =$ ____________

7、$y''-6y'+13y=0$ 的通解为 ____________

8、交换积分次序 $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy =$ ____________

9、函数 $z=x^y$ 的全微分 $dz=$ ____________________

10、设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\int_{-1}^{1}[f(x)+f(-x)+x]x^3\,dx=$ ____________

三、计算题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

11、已知 $y=\arctan\sqrt{x}+\ln(1+2^x)+\cos\frac{\pi}{5}$，求 dy .

12、计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\sin x}$.

13、求 $f(x)=\dfrac{(x-1)\sin x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点，并说明其类型 .

14、已知 $y^2=x+\ln\dfrac{y}{x}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=1}=$

15、计算 $\int\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}dx$.

16、已知 $\int_{-\infty}^{0}\dfrac{k}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2}$，求 k 的值 .

17、求 $y'-y\tan x=\sec x$ 满足 $y|_{x=0}=0$ 的特解 .

18、计算 $\iint\limits_D\sin y^2\,dxdy$，D 是 $x=1$、$y=2$、$y=x-1$ 围成的区域 .

19、已知 $y=f(x)$ 过坐标原点，并且在原点处的切线平行于直线 $2x+y-3=0$，若 $f'(x)=3ax^2+b$，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，试确定 a、b 的值，并求出 $y=f(x)$ 的表达式 .

20、设 $z=f(x^2,\dfrac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、综合题（本大题共 4 小题，第 21 小题 10 分，第 22 小题 8 分，第 23 、24 小题各 6 分，共 30 分）

21 、过 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，求

（1）切线方程；

（2）由 $y=\sqrt{x-2}$，切线及 x 轴围成的平面图形面积；

（3）该平面图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转一周的体积。

22 、设 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$.

（1）求 a，使得 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

（2）求 $g'(x)$.

23 、设 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上具有严格单调递减的导数 $f'(x)$ 且 $f(0)=0$；试证明：

对于满足不等式 $0<a<b<a+b<c$ 的 a 、 b 有 $f(a)+f(b)>f(a+b)$.

24 、一租赁公司有 40 套设备，若定金每月每套 200 元时可全租出，当租金每月每套增加 10 元时，租出设备就会减少一套，对于租出的设备每套每月需花 20 元的维护费。问每月一套的定金多少时公司可获得最大利润？

2002 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、选择题 （本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1、下列极限中，正确的是 （ ）

A、$\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=e$ B、$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1$

C、$\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\sec x}=e$ D、$\lim\limits_{n\to \infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=e$

2、已知 $f(x)$ 是可导的函数，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=$ （ ）

A、$f'(x)$ B、$f'(0)$ C、$2f'(0)$ D、$2f'(x)$

3、设 $f(x)$ 有连续的导函数，且 $a\neq 0$、1，则下列命题正确的是 （ ）

A、$\int f'(ax)dx=\frac{1}{a}f(ax)+C$ B、$\int f'(ax)dx=f(ax)+C$

C、$\left(\int f'(ax)dx\right)'=af(ax)$ D、$\int f'(ax)dx=f(x)+C$

4、若 $y=\arctan e^{x}$，则 $dy=$ （ ）

A、$\frac{1}{1+e^{2x}}dx$ B、$\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx$ C、$\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$ D、$\frac{e^{x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$

5、在空间坐标系下，下列为平面方程的是 （ ）

A、$y^2=x$ B、$\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y+z=1\end{cases}$ C、$\frac{x+2}{2}=\frac{y+4}{7}=\frac{z}{-3}$ D、$3x+4z=0$

6、微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解是 （ ）

A、$y=c_1\cos x+c_2\sin x$ B、$y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$ C、$y=(c_1+c_2x)e^{-x}$ D、$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$

7、已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是可导函数，则 $(f(x)-f(-x))'$ 一定是 （ ）

A、奇函数 B、偶函数 C、非奇非偶函数 D、不能确定奇偶性

8、设 $I=\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1+x}}dx$，则 I 的范围是 （ ）

A、$0 \le I \le \frac{\sqrt{2}}{2}$　　B、$I \ge 1$　　C、$I \le 0$　　D、$\frac{\sqrt{2}}{2} \le I \le 1$

9、若广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛，则 p 应满足　　（　）

A、$0 < p < 1$　　B、$p > 1$　　C、$p < -1$　　D、$p < 0$

10、若 $f(x) = \frac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$，则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的　　（　）

A、可去间断点　　B、跳跃间断点　　C、无穷间断点　　D、连续点

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

11、设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $e^x - e^y = \sin(xy)$ 确定，则 $y'|_{x=0} =$ ________

12、函数 $f(x) = \frac{x}{e^x}$ 的单调增加区间为 ________

13、$\int_{-1}^{1} \frac{x\tan^2 x}{1+x^2} dx =$ ________

14、设 y(x) 满足微分方程 $e^x yy' = 1$，且 $y(0) = 1$，则 $y =$ ________

15、交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x, y) dx =$ ________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

16、求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \tan x}{\int_0^x t(t+\sin t)dt}$

17、已知 $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$

18、已知 $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

19、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \ge 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)dx$

20、计算 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{x} \sqrt{x^2+y^2}\, dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy$

21、求 $y' - (\cos x)y = e^{\sin x}$ 满足 $y(0)=1$ 的解 .

22、求积分 $\int \frac{x \arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$

23、设 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，求：（1） k 的值（2） $f'(x)$

四、综合题（本大题共 3 小题，第 24 小题 7 分，第 25 小题 8 分，第 26 小题 8 分，共 23 分）

24、从原点作抛物线 $f(x) = x^2 - 2x + 4$ 的两条切线，由这两条切线与抛物线所围成的图形记为 S，求：（1） S 的面积； （2）图形 S 绕 X 轴旋转一周所得的立体体积 .

25、证明：当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $\cos x \leq 1 - \frac{1}{\pi} x^2$ 成立 .

26、已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C(x) = 25000 + 200x + \frac{1}{40}x^2$（元），产品产量 x 与价格 P 之间的关系为： $P(x) = -\frac{1}{20}x$（元）

求：(1) 要使平均成本最小，应生产多少件产品？

(2) 当企业生产多少件产品时，企业可获最大利润，并求最大利润 .

2003 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、选择题 （本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1 、已知 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$ （ ）

A 、2　　B、 4　　C、 0　　D、 -2

2 、若已知 $F'(x)=f(x)$，且 $f(x)$ 连续，则下列表达式正确的是 （ ）

A 、 $\int F(x)dx=f(x)+c$

B 、 $\dfrac{d}{dx}\int F(x)dx=f(x)+c$

C 、 $\int f(x)dx=F(x)+c$

D 、 $\dfrac{d}{dx}\int F(x)dx=f(x)$

3 、下列极限中，正确的是 （ ）

A 、 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$　　B 、 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=1$　　C 、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\infty$　　D、 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$

4 、已知 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则下列正确的是 （ ）

A 、 $dy=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$

B、 $y'=\sqrt{1+x^2}\,dx$

C 、 $dy=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

D、 $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

5 、在空间直角坐标系下，与平面 $x+y+z=1$ 垂直的直线方程为 （ ）

A 、 $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+2y+z=0\end{cases}$

B、 $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z}{-3}$

C 、 $2x+2y+2z=5$

D、 $x-1=y-2=z-3$

6 、下列说法正确的是 （ ）

A 、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 收敛

B、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n}$ 收敛

C 、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 绝对收敛

D、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!$ 收敛

7、微分方程 $y''+y=0$ 满足 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 的解是

A、$y=c_1\cos x+c_2\sin x$　　　　B、$y=\sin x$

C、$y=\cos x$　　　　D、$y=c\cos x$

8、若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x} & x>0\\ 2 & x=0\\ \dfrac{1}{bx}\ln(1-3x) & x<0\end{cases}$ 为连续函数，则 a、b 满足

A、$a=2$、b 为任何实数　　　　B、$a+b=\dfrac{1}{2}$

C、$a=2$、$b=-\dfrac{3}{2}$　　　　D、$a=b=1$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

9、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x+y)=e^{xy}$ 所确定，则 $y'|_{x=0}=$ ____________

10、曲线 $y=f(x)=x^3-3x^2+x+9$ 的凹区间为 ____________

11、$\int_{-1}^{1}x^2(\sqrt[3]{x}+\sin x)\,dx=$ ____________

12、交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx=$ ____________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

13、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

14、求函数 $z=\tan\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的全微分

15、求不定积分 $\int x\ln x\,dx$

16、计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{|\sin\theta|}{1+\cos^2\theta}d\theta$

17、求微分方程 $xy'-y=x^2e^x$ 的通解 .

18、已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

19、求函数 $f(x) = \dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|}$ 的间断点并判断其类型 .

20、计算二重积分 $\iint\limits_D (1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中 D 是第一象限内由圆 $x^2+y^2=2x$ 及直线 $y=0$ 所围成的区域 .

四、综合题（本大题共 3 小题，第 21 小题 9 分，第 22 小题 7 分，第 23 小题 8 分，共 24 分）

21、设有抛物线 $y = 4x - x^2$，求：

（i）、抛物线上哪一点处的切线平行于 X 轴？写出该切线方程；

（ii）、求由抛物线与其水平切线及 Y 轴所围平面图形的面积；

（iii）、求该平面图形绕 X 轴旋转一周所成的旋转体的体积 .

22、证明方程 $xe^x = 2$ 在区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根 .

23、要设计一个容积为 V 立方米的有盖圆形油桶，已知单位面积造价：侧面是底面的一半，而盖又是侧面的一半，问油桶的尺寸如何设计，可以使造价最低？

五、附加题（2000 级考生必做，2001 级考生不做）

24、将函数 $f(x) = \dfrac{1}{4+x}$ 展开为 x 的幂级数，并指出收敛区间。（不考虑区间端点）（本小题 4 分）

25、求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的通解。（本小题 6 分）

2004 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、单项选择题 （本大题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分.）

1、$f(x)=\begin{cases} x^3 & x\in[-3,0] \\ -x^3 & x\in(0,2] \end{cases}$，是: （ ）

A、有界函数　　B、奇函数　　C、偶函数　　D、周期函数

2、当 $x\to 0$ 时，$x^2-\sin x$ 是关于 x 的 （ ）

A、高阶无穷小　　B、同阶但不是等价无穷小　　C、低阶无穷小　　D、等价无穷小

3、直线 L 与 x 轴平行且与曲线 $y=x e^x$ 相切，则切点的坐标是 （ ）

A、$(1,1)$　　B、$(-1,1)$　　C、$(0,-1)$　　D、$(0,1)$

4、$x^2+y^2=8R^2$ 设所围的面积为 S，则 $\int_0^{2\sqrt{2}R}\sqrt{8R^2-x^2}\,dx$ 的值为 （ ）

A、S　　B、$\frac{S}{4}$　　C、$\frac{S}{2}$　　D、$2S$

5、设 $u(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$、$v(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则下列等式成立的是 （ ）

A、$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$　　B、$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$　　C、$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$　　D、$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}$

6、微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的特解 y^* 的形式应为 （ ）

A、Axe^{2x}　　B、$(Ax+B)e^{2x}$　　C、Ax^2e^{2x}　　D、$x(Ax+B)e^{2x}$

二、填空题 （本大题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

7、设 $f(x)=\left(\frac{2+x}{3+x}\right)^x$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$________

8、过点 $M(1,0,-2)$ 且垂直于平面 $4x+2y-3z=2$ 的直线方程为 ________

9、设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，$n\in N$，则 $f'(0)=$________

10、求不定积分 $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ ____________

11、交换二次积分的次序 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy =$ ____________

12、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$ 的收敛区间为 ____________

三、解答题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

13、求函数 $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ 的间断点，并判断其类型 .

14、求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}(\tan t-\sin t)\,dt}{(e^{x^2}-1)\ln(1+3x^2)}$.

15、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^y=1$ 所确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$ 的值.

16、设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{e^x}{x}$，计算 $\int xf'(2x)dx$.

17、计算广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

18、设 $z=f(x-y,xy)$，且具有二阶连续的偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

19、计算二重积分 $\iint_D \frac{\sin y}{y}dxdy$，其中 D 由曲线 $y=x$ 及 $y^2=x$ 所围成 .

20、把函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ 展开为 $x-2$ 的幂级数，并写出它的收敛区间．

四、综合题（本大题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分）

21、证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$，并利用此式求 $\int_0^{\pi} \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$．

22、设函数 $f(x)$ 可导，且满足方程 $\int_0^x tf(t)\,dt=x^2+1+f(x)$，求 $f(x)$．

23、甲、乙二城位于一直线形河流的同一侧，甲城位于岸边，乙城离河岸 40 公里，乙城在河岸的垂足与甲城相距 50 公里，两城计划在河岸上合建一个污水处理厂，已知从污水处理厂到甲乙二城铺设排污管道的费用分别为每公里 500、700 元。问污水处理厂建在何处，才能使铺设排污管道的费用最省？

2005 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、$x=0$ 是 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 的（　　）

A、可去间断点　　B、跳跃间断点　　C、第二类间断点　　D、连续点

2、若 $x=2$ 是函数 $y=x-\ln(\frac{1}{2}+ax)$ 的可导极值点，则常数 $a=$（　　）

A、-1　　B、$\frac{1}{2}$　　C、$-\frac{1}{2}$　　D、1

3、若 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int \sin x f(\cos x)dx=$（　　）

A、$F(\sin x)+C$　　B、$-F(\sin x)+C$　　C、$F(\cos)+C$　　D、$-F(\cos x)+C$

4、设区域 D 是 xoy 平面上以点 $A(1,1)$、$B(-1,1)$、$C(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，区域 D_1 是 D 在第一象限的部分，则：$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy=$（　　）

A、$2\iint\limits_{D_1}(\cos x\sin y)\,dxdy$　　B、$2\iint\limits_{D_1}xydxdy$

C、$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　D、0

5、设 $u(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$，$v(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则下列等式成立的是（　　）

A、$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$　　B、$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$　　C、$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$　　D、$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}$

6、正项级数(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^3$，则下列说法正确的是（　　）

A、若（1）发散、则（2）必发散　　B、若（2）收敛、则（1）必收敛

C、若（1）发散、则（2）可能发散也可能收敛　　D、（1）、（2）敛散性相同

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=$________________；

8、函数 $f(x)=\ln x$ 在区间 $[1,e]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi=$________________；

9、$\int_{-1}^{1}\dfrac{\pi x+1}{1+x^{2}}dx=$________________；

10、设向量 $\alpha=\{3,4,-2\}$、$\beta=\{2,1,k\}$；α、β 互相垂直，则 $k=$________________；

11、交换二次积分的次序 $\int_{-1}^{0}dx\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^{2}}}f(x,y)dy=$________________；

12、幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{n}$ 的收敛区间为________________；

三、解答题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分）

13、设函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+2\sin x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 R 内连续，并满足：$f(0)=0$、$f'(0)=6$，求 a．

14、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$．

15、计算 $\int\tan^{3}x\sec x dx$．

16、计算 $\int_{0}^{1}\arctan x dx$

17、已知函数 $z=f(\sin x,y^{2})$，其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}$

18、求过点 $A(3,1,-2)$ 且通过直线 $L:\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程．

19、把函数 $f(x)=\dfrac{x^{2}}{2-x-x^{2}}$ 展开为 x 的幂级数，并写出它的收敛区间．

20、求微分方程 $xy' + y - e^x = 0$ 满足 $y|_{x=1} = e$ 的特解 .

四、证明题（本题 8 分）

21、证明方程： $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在 $[-1,1]$ 上有且仅有一根 .

五、综合题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，满分 30 分）

22、设函数 $y = f(x)$ 的图形上有一拐点 $P(2,4)$ ，在拐点处的切线斜率为 -3 ，又知该函数的二阶导数 $y'' = 6x + a$ ，求 $f(x)$.

23、已知曲边三角形由 $y^2 = 2x$ 、 $x = 0$ 、 $y = 1$ 所围成，求：

（1）、曲边三角形的面积;

（2）、曲边三角形饶 X 轴旋转一周的旋转体体积 .

24、设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(2) = 1$， $F(u) = \int_1^u dy \int_y^u f(x)dx$ ， $(u > 1)$

（1）、交换 $F(u)$ 的积分次序;

（2）、求 $F'(2)$.

2006 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\frac{x}{2})}{x}=\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(\frac{x}{3})}=$ （ ）

A、$\dfrac{1}{2}$　　B、2　　C、3　　D、$\dfrac{1}{3}$

2、函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 （ ）

A、连续但不可导　　B、连续且可导　　C、不连续也不可导　　D、可导但不连续

3、下列函数在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是 （ ）

A、$y=e^x$　　B、$y=1+|x|$　　C、$y=1-x^2$　　D、$y=1-\dfrac{1}{x}$

4、已知 $\int f(x)dx=e^{2x}+C$，则 $\int f'(-x)dx=$ （ ）

A、$2e^{-2x}+C$　　B、$\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C$　　C、$-2e^{-2x}+C$　　D、$-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C$

5、设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，如下说法正确的是 （ ）

A、如果 $\lim\limits_{n\to 0}u_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛　　B、如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l\,(0\le l\le\infty)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛

C、如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 必定收敛　　D、如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛

6、设对一切 x 有 $f(-x,y)=-f(x,y)$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$，

$D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$，则 $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=$ （ ）

A、0　　B、$\iint\limits_{D_1}f(x,y)\,dxdy$　　C、$2\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy$　　D、$4\iint\limits_{D_1}f(x,y)\,dxdy$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7、已知 $x\to 0$ 时，$a(1-\cos x)$ 与 $x\sin x$ 是等级无穷小，则 $a=$______________

8、若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，则当 $A=$_________时，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续 .

9 、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数且 $f(1)=2$，$\int_0^1 f(x)\,dx=3$，则 $\int_0^1 xf'(x)dx=$____________

10 、设 $|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$____________

11、设 $u=e^{xy}\sin x$，$\frac{\partial u}{\partial x}=$_______________

12 、$\iint\limits_D dxdy=$___________ 其中 D 为以点 O(0,0) 、 A(1,0) 、 B(0,2) 为顶点的三角形区域 .

三、解答题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分）

13 、计算 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

14 、若函数 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$.

15 、计算 $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

16 、计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$.

17 、求微分方程 $x^2y'=xy-y^2$ 的通解 .

18 、将函数 $f(x)=x\ln(1+x)$ 展开为 x 的幂函数（要求指出收敛区间） .

19 、求过点 $M(3,1,-2)$ 且与二平面 $x-y+z-7=0$ 、 $4x-3y+z-6=0$ 都平行的直线方程 .

20 、设 $z=xf(x^2,xy)$ 其中 $f(u,v)$ 的二阶偏导数存在，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

四、证明题（本题满分 8 分）.

21、证明：当 $|x| \le 2$ 时，$|3x - x^3| \le 2$.

五、综合题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，满分 30 分）

22、已知曲线 $y = f(x)$ 过原点且在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x + y$，求此曲线方程.

23、已知一平面图形由抛物线 $y = x^2$、$y = -x^2 + 8$ 围成.

（1）求此平面图形的面积；

（2）求此平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积

24、设 $g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\iint_{D_t} f(x)\,dxdy & t \ne 0 \\ a & t = 0 \end{cases}$，其中 D_t 是由 $x = t$、$y = t$ 以及坐标轴围成的正方形区域，函数 $f(x)$ 连续.

（1）求 a 的值使得 $g(t)$ 连续；

（2）求 $g'(t)$.

2007 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=2$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\dfrac{1}{2x}\right)=$ （　　）

A、$\dfrac{1}{4}$　　B、$\dfrac{1}{2}$　　C、2　　D、4

2、已知当 $x\to 0$ 时，$x^2\ln(1+x^2)$ 是 $\sin^n x$ 的高阶无穷小，而 $\sin^n x$ 又是 $1-\cos x$ 的高阶无穷小，则正整数 $n=$ （　　）

A、1　　B、2　　C、3　　D、4

3、设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，则方程 $f'(x)=0$ 的实根个数为 （　　）

A、1　　B、2　　C、3　　D、4

4、设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin 2x$，则 $\int f'(2x)dx=$ （　　）

A、$\cos 4x+C$　　B、$\dfrac{1}{2}\cos 4x+C$　　C、$2\cos 4x+C$　　D、$\sin 4x+C$

5、设 $f(x)=\int_1^{x^2}\sin t^2\,dt$，则 $f'(x)=$ （　　）

A、$\sin x^4$　　B、$2x\sin x^2$　　C、$2x\cos x^2$　　D、$2x\sin x^4$

6、下列级数收敛的是 （　　）

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}$　　B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$　　C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}$　　D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7、设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+kx)^{\frac{1}{x}} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处连续，则常数 $k=$ ________

8、若直线 $y=5x+m$ 是曲线 $y=x^2+3x+2$ 的一条切线，则常数 $m=$ ________

9、定积分 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}(1+x\cos^3 x)dx$ 的值为 ________

10、已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 均为单位向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，则以向量 $\vec{a}\,\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 ______

11、设 $z=\frac{x}{y}$，则全微分 $dz=$ ____________

12、设 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ 为某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，则该微分方程为 ________

三、解答题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分）

13、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x\tan x}$.

14、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^x-e^y=xy$ 确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$、$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

15、求不定积分 $\int x^2e^{-x}dx$.

16、计算定积分 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

17、设 $z=f(2x+3y,xy)$ 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

18、求微分方程 $xy'-y=2007x^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=2008$ 的特解.

19、求过点 $(1,2,3)$ 且垂直于直线 $\begin{cases}x+y+z+2=0\\2x-y+z+1=0\end{cases}$ 的平面方程.

20、计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2x, y\ge 0\}$.

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分）

21 、设平面图形由曲线 $y=1-x^2$（$x\geq 0$）及两坐标轴围成 .

（1）求该平面图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体的体积；

（2）求常数 a 的值，使直线 $y=a$ 将该平面图形分成面积相等的两部分 .

22 、设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-9$ 具有如下性质：

（1）在点 $x=1$ 的左侧临近单调减少；

（2）在点 $x=1$ 的右侧临近单调增加；

（3）其图形在点 $(1,2)$ 的两侧凹凸性发生改变 .

试确定 a ，b ，c 的值 .

五、证明题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，满分 18 分）

23 、设 $b>a>0$ ，证明：$\int_a^b dy\int_y^b f(x)e^{2x+y}dx=\int_a^b(e^{3x}-e^{2x+a})f(x)dx$.

24 、求证：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

2008 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，下列函数中必为奇函数的是 （ ）

A、$y=-|f(x)|$　　B、$y=x^3 f(x^4)$

C、$y=-f(-x)$　　D、$y=f(x)+f(-x)$

2、设函数 $f(x)$ 可导，则下列式子中正确的是 （ ）

A、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)-f(x)}{x}=-f'(0)$　　B、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+2x)-f(x)}{x}=f'(x_0)$

C、$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$　　D、$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=2f'(x_0)$

3、设函数 $f(x)=\int_{2x}^{1} t^2\sin t\,dt$，则 $f'(x)$ 等于 （ ）

A、$4x^2\sin 2x$　　B、$8x^2\sin 2x$　　C、$-4x^2\sin 2x$　　D、$-8x^2\sin 2x$

4、设向量 $\vec{a}=(1,2,3)$，$\vec{b}=(3,2,4)$，则 $\vec{a}\times\vec{b}$ 等于 （ ）

A、（2，5，4）　　B、（2，－5，－4）　　C、（2，5，－4）　　D、（－2，－5，4）

5、函数 $z=\ln\dfrac{y}{x}$ 在点（2，2）处的全微分 dz 为 （ ）

A、$-\dfrac{1}{2}dx+\dfrac{1}{2}dy$　　B、$\dfrac{1}{2}dx+\dfrac{1}{2}dy$　　C、$\dfrac{1}{2}dx-\dfrac{1}{2}dy$　　D、$-\dfrac{1}{2}dx-\dfrac{1}{2}dy$

6、微分方程 $y''+3y'+2y=1$ 的通解为 （ ）

A、$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+1$　　B、$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\dfrac{1}{2}$

C、$y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+1$　　D、$y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+\dfrac{1}{2}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7、设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|(x-1)}$，则其第一类间断点为 ________.

8、设函数 $f(x)=\begin{cases} a+x, & x\geq 0, \\ \dfrac{\tan 3x}{x}, & x<0, \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$____________.

9、已知曲线 $y=2x^3-3x^2+4x+5$，则其拐点为______________.

10、设函数 $f(x)$ 的导数为 $\cos x$，且 $f(0)=-\dfrac{1}{2}$，则不定积分 $\int f(x)\,dx=$_______________.

11、定积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2+\sin x}{1+x^2}dx$ 的值为_______________.

12、幂函数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$ 的收敛域为__________________.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分）

13、求极限：$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x}$

14、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ $t\neq 2n\pi, n\in Z$ 所决定，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$

15、求不定积分：$\displaystyle\int\frac{x^3}{x+1}dx$.

16、求定积分：$\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$.

17、设平面 π 经过点 A（2，0，0），B（0，3，0），C（0，0，5），求经过点 P（1，2，1）且与平面 π 垂直的直线方程 .

18、设函数 $z=f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)$，其中 $f(x)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

19、计算二重积分 $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$，直线 $y=x, x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域 .

20、求微分方程 $xy' = 2y + x^2$ 的通解.

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分）

21、求曲线 $y = \frac{1}{x}(x > 0)$ 的切线，使其在两坐标轴上的截距之和最小，并求此最小值

22、设平面图形由曲线 $y = x^2$，$y = 2x^2$ 与直线 $x = 1$ 所围成.

（1）求该平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

（2）求常数 a，使直线 $x = a$ 将该平面图形分成面积相等的两部分.

五、证明题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，满分 18 分）

23、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2a](a > 0)$ 上连续，且 $f(0) = f(2a) \neq f(a)$，证明：在开区间 $(0,a)$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi) = f(\xi + a)$.

24、对任意实数 x，证明不等式：$(1-x)e^x \leq 1$.

2009 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、已知 $\lim\limits_{x\to} \dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=3$，则常数 a, b 的取值分别为 （ ）

A、$a=-1, b=-2$ B、$a=-2, b=0$ C、$a=-1, b=0$ D、$a=-2, b=-1$

2、已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$，则 $x=2$ 为 $f(x)$ 的

A、跳跃间断点 B、可去间断点 C、无穷间断点 D、震荡间断点

3、设函数 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，则常数 α 的取值范围为 （ ）

A、$0<\alpha<1$ B、$0<\alpha\le 1$ C、$\alpha >$ D、$\alpha \ge$

4、曲线 $y=\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$ 的渐近线的条数为 （ ）

A、1 B、2 C、3 D、4

5、设 $F(x)=\ln(3x+1)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f'(2x+1)dx=$ （ ）

A、$\dfrac{1}{6x+4}+C$ B、$\dfrac{3}{6x+4}+C$ C、$\dfrac{1}{12x+8}+C$ D、$\dfrac{3}{12x+8}+C$

6、设 α 为非零常数，则数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+\alpha}{n^2}$ （ ）

A、条件收敛 B、绝对收敛 C、发散 D、敛散性与 α 有关

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7、已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-C}\right)^x=2$，则常数 $C=$ ____________.

8、设函数 $\varphi(x)=\int_0^{2x} te^t\,dt$，则 $\varphi'(x)=$ ____________.

9、已知向量 $\vec{a}=(1,0,-1)$，$\vec{b}=(1,-2,1)$，则 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为 ____________.

10、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xz^2+yz=1$ $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

11、若幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2}x^n\ (a>0)$ 的收敛半径为 $\frac{1}{2}$，则常数 $a=$ ________.

12、微分方程 $(1+x^2)ydx-(2-y)xdy=0$ 的通解为 ________.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分）

13、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}$

14、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t)\\ y=t^2+2t-3\end{cases}$ 所确定，，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

15、求不定积分：$\int\sin\sqrt{2x+1}dx$.

16、求定积分：$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx$.

17、求通过直线 $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$ 且垂直于平面 $x+y+z-2=0$ 的平面方程 .

18、计算二重积分 $\iint\limits_D yd\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,x\le y\le 2,x^2+y^2\ge 2\}$.

19、设函数 $z=f(\sin x,xy)$ ，其中 $f(x)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

20、求微分方程 $y''-y=x$ 的通解 .

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分）

21、已知函数 $f(x)=x^3-3x+1$，试求：

（1）函数 $f(x)$ 的单调区间与极值；

（2）曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点；

（3）函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-2,3]$ 上的最大值与最小值．

22、设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a, y=0$ 所围成的平面区域，D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a, x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$．试求：

（1）D_1 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积 V_1，以及 D_2 绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积 V_2．

（2）求常数 a 的值，使得 D_1 的面积与 D_2 的面积相等．

五、证明题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，满分 18 分）

23、已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ 1+x, & x\geq 0 \end{cases}$，证明函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续但不可导．

24、证明：当 $1<x<2$ 时，$4x\ln x>x^2+2x-3$．

2010 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.设当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=x-\sin x$ 与 $g(x)=ax^n$ 是等价无穷小，则常数 a,n 的值为（　）

A. $a=\frac{1}{6},n=3$　　B. $a=\frac{1}{3},n=3$　　C. $a=\frac{1}{12},n=4$　　D. $a=\frac{1}{6},n=4$

2.曲线 $y=\frac{x^2-3x+4}{x^2-5x+6}$ 的渐近线共有（　）

A.1 条　　B.2 条　　C.3 条　　D.4 条

3.设函数 $\Phi(x)=\int_{x^2}^{2} e^t\cos t\,dt$，则函数 $\Phi(x)$ 的导数 $\Phi'(x)$ 等于（　）

A. $2xe^{x^2}\cos x^2$　　B. $-2xe^{x^2}\cos x^2$　　C. $-2xe^{x}\cos x$　　D. $-e^{x^2}\cos x^2$

4.下列级数收敛的是（　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+n}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

5.二次积分 $\int_0^1 dy\int_1^{y+1} f(x,y)dx$ 交换积分次序后得（　）

A. $\int_0^1 dx\int_1^{x+1} f(x,y)dy$　　B. $\int_1^2 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy$

C. $\int_1^2 dx\int_1^{x-1} f(x,y)dy$　　D. $\int_1^2 dx\int_{x-1}^{1} f(x,y)dy$

6.设 $f(x)=x^3-3x$，则在区间 $(0,1)$ 内（　）

A. 函数 $f(x)$ 单调增加且其图形是凹的　　B. 函数 $f(x)$ 单调增加且其图形是凸的

C. 函数 $f(x)$ 单调减少且其图形是凹的　　D. 函数 $f(x)$ 单调减少且其图形是凸的

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=$________

8. 若 $f'(0)=1$，则 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=$________

9. 定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{x^3+1}{x^2+1}dx$ 的值为________

10. 设 $\vec{a}=(1,2,3),\vec{b}=(2,5,k)$，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，则常数 $k=$________

11. 设函数 $z=\ln\sqrt{x^2+4y}$，则 $dz\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=$ ____________

12. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$ 的收敛域为 ____________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分）

13、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\tan x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

14、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y+e^{x+y}=2x$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

15、求不定积分 $\int x\arctan x\,dx$

16、计算定积分 $\int_0^4\dfrac{x+3}{\sqrt{2x+1}}dx$

17、求通过点 $(1,1,1)$，且与直线 $\begin{cases}x=2+t\\y=3+2t\\z=5+3t\end{cases}$ 垂直，又与平面 $2x-z-5=0$ 平行的直线的方程。

18、设 $z=y^2f(xy,e^x)$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

19、计算二重积分 $\iint\limits_D x\,dxdy$，其中 D 是由曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$，直线 $y=x$ 及 x 轴所围成的闭区域。

20、已知函数 $y=e^x$ 和 $y=e^{-2x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个解，试确定常数 p,q 的值，并求微分方程 $y''+py'+qy=e^x$ 的通解。

四、证明题（每小题 9 分，共 18 分）

21、证明：当 $x > 1$ 时，$e^{x-1} > \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

22、设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处具有二阶连续导数，且

$\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)=1$，证明：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导。

五、综合题（每小题 10 分，共 20 分）

23、设由抛物线 $y=x^2\ (x\geq 0)$，直线 $y=a^2\ (0<a<1)$ 与 y 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积记为 $V_1(a)$，由抛物线 $y=x^2\ (x\geq 0)$，直线 $y=a^2\ (0<a<1)$ 与直线 $x=1$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积记为 $V_2(a)$，另 $V(a)=V_1(a)+V_2(a)$，试求常数 a 的值，使 $V(a)$ 取得最小值。

24、设函数 $f(x)$ 满足方程 $'(x)+f(x)=\quad {}^{x}$，且 $f(0)=$ ，记由曲线 $=\frac{f'(x)}{f(x)}$ 与直线 $y=1$, $x=t\ (t>0)$ 及 y 轴所围平面图形的面积为 $A(t)$，试求 $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$

2001 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、C　2、D　3、B　4、D　5、A　6、2

7、$y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$，其中 C_1、C_2 为任意实数

8、$\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx$　9、$yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy$　10、$\frac{64}{5}$

11、$dy=\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2^x\ln x}{1+2^x}\right)dx$　12、$-\frac{1}{3}$

13、$x=-1$ 是第二类无穷间断点；$x=0$ 是第一类跳跃间断点；$x=1$ 是第一类可去间断点．

14、1　15、$\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx=\int\frac{e^{2x}+e^x-e^x}{1+e^x}dx=e^x-\ln(1+e^x)+C$　16、$\frac{1}{\pi}$

17、$y=e^{-\int\tan xdx}\left[\int\sec x\cdot e^{\int\tan xdx}dx+C\right]=e^{\ln\cos x}\left[\int\sec x\, e^{-\ln\cos x}dx+C\right]=\frac{x+C}{\cos x}$,

$y|_{x=0}=0\Rightarrow\frac{0+C}{\cos 0}\Rightarrow C=0\Rightarrow y=\frac{x}{\cos x}$.

18、解：原式 $=\int_0^2\sin y^2dy\int_1^{1+y}dx=\frac{1-\cos 4}{2}$

19、解：“在原点的切线平行于直线 $2x+y-3=0$” $\Rightarrow f'(x)|_{x=0}=-2$ 即 $b=-2$

又由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，得 $f'(1)=0$，即 $3a+b=0$，得 $a=-\frac{b}{3}=\frac{2}{3}$

故 $f'(x)=2x^2-2$，两边积分得 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x+c$，又因曲线 $y=f(x)$ 过原点，

所以 $c=0$，所以 $y=f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x$

20、$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot 2x+f'_2\cdot\frac{1}{y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x^2}{y^2}f''_{12}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{y^2}f'_2$

21、（1）$2y-x+1=0$；（2）$\frac{1}{3}$；（3）$V_x=\frac{\pi}{6}$，$V_y=\frac{6}{5}\pi$

22、$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(\Delta x)\cdot\Delta x-f(\Delta x)}{1}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(\Delta x)\cdot\Delta x-f(\Delta x)}{(\Delta x)^2}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f''(\Delta x)\cdot\Delta x+f'(\Delta x)-f'(\Delta x)}{2\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f''(\Delta x)\cdot\Delta x}{2\Delta x}=\frac{1}{2}f''(0)$.

23、由拉格朗日定理知：

$$\frac{f(a+b)-f(b)}{a} = f'(\xi_1) \quad (b<\xi_1<a+b),$$

$$\frac{f(a)-f(0)}{a} = f'(\xi_2) \quad (b<\xi_2<a)$$

由于 $f'(x)$ 在 $(0,c)$ 上严格单调递减，知 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，因 $f(0)=0$，故 $f(a)+f(b)>f(a+b)$.

24 、解：设每月每套租金为 $200+10x$，则租出设备的总数为 $40-x$，每月的毛收入为：$(200+10x)(40-x)$，维护成本为：$20(40-x)$.于是利润为：

$$L(x)=(180+10x)(40-x)=7200+220x-10x^2 \quad (0\le x\le 40)$$

$$L'(x)=0 \Rightarrow x=11$$

比较 $x=0$、$x=11$ 、$x=40$ 处的利润值，可得 $L(11)>L(0)>L(40)$，

故租金为 $(200+10\times 11)=310$ 元时利润最大 .

2002 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

01 － 05、 ACABD　　06 － 10、 CBABB　　11、 1　　12、$(-\infty, 1]$　　13、0

14 、$\sqrt{-2e^{-x}+3}$　　15 、$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$　　16 、$\frac{3}{2}$　　17、1

18 、$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^4}$

19 、解：令 $t=x-1$，则 $x=2$ 时 $t=1$，$x=0$ 时，$t=-1$，

所以 $\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^0\frac{1}{1+e^x}dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=1+\ln(1+e^{-1})=\ln(e+1)$

20 、原式 $=\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 r\cdot r\,dr=\frac{\pi}{12}$

21 、$y=e^{\cos x}(x+1)$　　22 、$\frac{1}{4}\arcsin^2 x^2+C$

23 、（1 ）$k=e$

（2 ）$f'(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right) \ldots\ldots x\ne 0\\ -\frac{e}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x=0\end{cases}$

24、（1）$S=\int_{-2}^{0}dx\int_{-6x}^{x^2-2x+4}dy+\int_{0}^{2}dx\int_{2x}^{x^2-2x+4}dy=\frac{16}{3}$

（2）$V=\pi\int_{-2}^{2}(x^2-2x+4)^2dx-\pi\int_{-2}^{0}(-6x)^2dx-\pi\int_{0}^{2}(2x)^2dx=\frac{512}{15}\pi$

25、证明：$F(x)=1-\frac{x^2}{\pi}-\cos x$，因为 $F(-x)=F(x)$，所以 $F(x)$ 是偶函数，我们只需要考虑区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $F'(x)=-\frac{2x}{\pi}+\sin x$，$F''(x)=-\frac{2}{\pi}+\cos x$．

在 $x\in\left[0,\arccos\frac{2}{\pi}\right]$ 时，$F''(x)>0$，即表明 $F'(x)$ 在 $\left[0,\arccos\frac{2}{\pi}\right]$ 内单调递增，所以函数 $F(x)$ 在 $\left[0,\arccos\frac{2}{\pi}\right)$ 内严格单调递增；

在 $x\in\left(\arccos\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$F''(x)<0$，即表明 $F'(x)$ 在 $\left(\arccos\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减，又因为 $F'(\frac{\pi}{2})=0$，说明 $F(x)$ 在 $\left(\arccos\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增．

综上所述，$F(x)$ 的最小值是当 $x=0$ 时，因为 $F(0)=0$，所以 $F(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内满足 $F(x)\geq 0$．

26、（1）设生产 x 件产品时，平均成本最小，则平均成本

$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{25000}{x}+200+\frac{1}{40}x$，$\overline{C}'(x)=0\Rightarrow x=100$（0 件）

（2）设生产 x 件产品时，企业可获最大利润，则最大利润

$xP(x)-C(x)=x\left(440-\frac{1}{20}x\right)-\left(25000+200x+\frac{1}{40}x^2\right)$，

$\left(xP(x)-C(x)\right)'=0\Rightarrow x=1600$．此时利润 $xP(x)-C(x)=167000$（元）．

2003 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、B 2、C 3、D 4、C 5、D 6、B 7、B 8、C 9、e^2-1 10、$(1,+\infty)$ 11、0

12、$\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)dy$　　13、原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}]^{\frac{x^2}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}}=e^2$

14、$dz=\frac{1}{y}\sec^2\frac{x}{y}dx-\frac{x}{y^2}\sec^2\frac{x}{y}dy$　　15、$\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$

16、原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-\sin\theta}{1+\cos^2\theta}d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta}d\theta=\frac{\pi}{2}$

17、$y=x(e^x+c)$　　18、$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}$、$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+t^2}{4t}$

19、$x=1$ 是 $f(x)=\frac{\sin(x-1)}{|x-1|}$ 的间断点，$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sin(x-1)}{|x-1|}=-1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sin(x-1)}{|x-1|}=1$

$x=1$ 是 $f(x)=\frac{\sin(x-1)}{|x-1|}$ 的第一类跳跃间断点．

20、$\iint\limits_D(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(1-r)r\,dr=\frac{\pi}{2}-\frac{16}{9}$

21、（i）切线方程：$y=4$；　（ii）$S=\int_0^2[4-(4x-x^2)]dx=\frac{8}{3}$

（iii）$V_x=V_1-V_2=\pi\times 4^2\times 2-\pi\int_0^2(4x-x^2)^2dx=\frac{224}{15}\pi$

22、证明：令 $f(x)=xe^x-2$，$f(0)=-2<0$，$f(1)=e-2>0$，因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内连续，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个实数 ξ，使得 $f(\xi)=0$；又因为 $f'(x)=e^x(1+x)$ 在 $(0,1)$ 内大于零，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，所以在 $(0,1)$ 内犹且仅有一个实根．

23、解：设圆柱形底面半径为 r，高位 h，侧面单位面积造价为 1，则有

$$\begin{cases} V=\pi r^2 h & (1)\\ y=\pi r^2\cdot 2l+\pi r^2\frac{l}{2}+2\pi rhl & (2)\end{cases}$$

由（1）得 $h=\frac{V}{\pi r^2}$ 代入（2）得：$y=\pi l\left(2r^2+\frac{1}{2}r^2+\frac{2V}{\pi r}\right)$

令 $y'=l\pi\left(5r-\frac{2V}{\pi r^2}\right)=0$，得：$r=\sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}$；此时圆柱高 $h=\frac{V}{\pi}\left(\frac{2V}{5\pi}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{25V}{4\pi}}$.

所以当圆柱底面半径 $r=\sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}$，高为 $h=\sqrt[3]{\frac{25V}{4\pi}}$ 时造价最低．

24、解：$f'(x)=-\frac{1}{(4+x)^2}$，$f''(x)=\frac{2}{(4+x)^3}$，$f'''(x)=-\frac{2\times3}{(4+x)^3}$，…

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(4+x)^{n+1}},$$

$f(0)=\frac{1}{4}$，$f'(0)=-\frac{1}{4^2}$，$f''(0)=\frac{2}{4^3}$，…，$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{4^{n+1}}$

$$f(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}x+\frac{1}{4^3}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{4^{n+1}}+\cdots,$$

收敛区间 $(-4,4)$

25、解：对应特征方程 $\lambda^2-2\lambda-3=0$，$\lambda_1=-1$、$\lambda_2=3$，所以 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$，因为 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，设特解方程为 $y^*=b_0x+b_1$，代入原方程，解得：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-x+\frac{1}{3}$．

2004 年江苏省普通高校"专转本"统一考试高等数学参考答案

1、A　2、B　3、C　4、B　5、A　6、D　7、e^{-1}

8、$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-3}$　　9、n!　　10、$\frac{1}{4}\arcsin^4 x+C$

11、$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y}f(x,y)dx$　　12、$(-1,3)$

13、间断点为 $x=k\pi$，$k\in Z$，当 $x=0$ 时，$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$，为可去间断点；当 $x=k\pi$，$k\neq0$，$k\in Z$ 时，$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\infty$，为第二类间断点．

14、原式 $=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(\tan t-\sin t)dt}{3x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{12x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\sin x)}{12x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{12x^3}=\frac{1}{24}$．

15、$x=0$ 代入原方程得 $y(0)=1$，对原方程求导得 $y'-e^y-xe^yy'=0$，对上式求导并将 $x=0$、$y=1$ 代入，解得：$y''=2e^2$．

16、因为 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{e^x}{x}$，所以 $f(x)=\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，

$$\int xf'(2x)dx = \frac{1}{2}\int xf'(2x)d(2x) = \frac{1}{2}\int xdf(2x) = \frac{1}{2}xf(2x) - \frac{1}{2}\int f(2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}xf(2x) - \frac{1}{4}\int f(2x)d(2x) = \frac{x(2x-1)e^{2x}}{8x^2} - \frac{e^{2x}}{8x} + C = \frac{x-1}{4x}e^{2x} + C$$

17、$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx \xlongequal{\sqrt{x-1}=t} \int_1^{+\infty}\frac{2t}{t(t^2+1)}dt = 2\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt = 2\arctan t\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

18、$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' + f_2'\cdot y$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_{11}''\cdot(-1) + f_{12}''\cdot x + f_2' + y[f_{21}''\cdot(-1) + f_{22}''\cdot x]$$

$$= -f_{11}'' + (x-y)f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2'$$

19、原式 $= \iint_D \frac{\sin y}{y}dxdy = \int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx = \int_0^1 (1-y)\sin y\,dy$

$$= (y-1)\cos y\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos y\,dy = 1 - \sin 1$$

20、$f(x) = \frac{1}{4+x-2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{4^n}$，$(-2<x<6)$

21、证明：令 $t=\pi-x$，$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = -\int_\pi^0(\pi-t)f(\sin(\pi-t))dt = \int_0^\pi(\pi-t)f(\sin t)dt$

$$= \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx - \int_0^\pi xf(\sin x)dx$$

故 $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$，证毕.

$$\int_0^\pi x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$$

22、等式两边求导的 $xf(x) = 2x + f'(x)$ 即 $f'(x) - xf(x) = -2x$ 且 $f(0) = -1$，$p = -x$，

$q = -2x$，$\int pdx = -\frac{x^2}{2}$，$e^{\int pdx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$，$e^{-\int pdx} = e^{\frac{x^2}{2}}$，

$$\int qe^{\int pdx}dx = \int -2xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2e^{-\frac{x^2}{2}}$$

所以 $f(x) = (2e^{-\frac{x^2}{2}} + C)e^{\frac{x^2}{2}} = 2 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$，由 $f(0) = -1$，

解得 $C = -3$，$f(x) = 2 - 3e^{\frac{x^2}{2}}$

23、设污水厂建在河岸离甲城 x 公里处，则

$$M(x)=500x+700\sqrt{40^2+(50-x)^2},\quad 0\le x\le 50,$$

$$M'=500+700\times\frac{1}{2}\times\frac{2(x-50)}{\sqrt{40^2+(50-x)^2}}=0$$

解得 $x=50-\dfrac{500}{\sqrt{6}}$ （公里），唯一驻点，即为所求 .

2005 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、A　2、C　3、D　4、A　5、A　6、C　7、2　8、$e-1$　9、$\dfrac{\pi}{2}$　10、5

11、$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y+1} f(x,y)dx$　12、$(-1,1)$

13、因为 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)$，

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+2=f'(0)+2=6+2=8,$$

$F(0)=a$，故 $a=8$.

14、$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t-\cos t+t\sin t}{-\sin t}=-t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y')'_t}{x'_t}=\dfrac{-1}{-\sin t}=\csc t$.

15、原式

$$=\int\tan^2x\tan x\sec x dx=\int(\sec^2x-1)d\sec x=\int\sec^2x d\sec x-\sec x=\frac{1}{3}\sec^3x-\sec x+C .$$

16、原式 $=x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

17、$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos x\cdot f'_1$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x(f''_{12}\cdot 2y)=2y\cos x f''_{12}$

18、$A=\{5,2,1\}$，$B=\{4,-3,0\}$　$\overrightarrow{AB}=\{1,-4,2\}$

$$\vec{n}=\vec{l}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 5 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=\{8,-9,-22\}$$

平面点法式方程为：

$8(x-3)-9(y-1)-22(z+2)=0$，即 $8x-9y-22z=59$.

19、$f(x)=\frac{x^2}{3}\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x^2}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{3}\cdot\frac{1}{1-x}$

$=\frac{x^2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}+1\right]x^n$，收敛域为 $-1<x<1$.

20、$y'+\frac{1}{x}\cdot y=\frac{e^x}{x}$，通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{e^x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{C}{x}+\frac{e^x}{x}$$

因为 $y(1)=e$，$e=e+C$，所以 $C=0$，故特解为 $y=\frac{e^x}{x}$.

21、证明：令 $f(x)=x^3-3x+1$，$x\in[-1,1]$，且 $f(-1)=3>0$，$f(1)=-1<0$，$f(-1)f(1)<0$，

由连续函数零点定理知，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上至少有一实根.

22、设所求函数为 $y=f(x)$，则有 $f(2)=4$，$f'(2)=-3$，$f''(2)=0$.

由 $y''=6x+a$，$y''(2)=0$ 得 $a=-12$，即 $y''=6x-12$.

因为 $y''=6x-12$，故 $y'=3x^2-12x+C_1$，由 $y'(2)=-3$，解得 $C_1=9$.

故 $y=x^3-6x^2+9x+C_2$，由 $y(2)=4$，解得 $C_2=2$.

所求函数为：$y=x^3-6x^2+9x+2$.

23、（1）$S=\int_0^1\frac{1}{2}y^2dy=\frac{1}{6}y^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}$

（2）$V_x=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(1^2-2x)dx=\pi(x-x^2)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$

24、解：积分区域 D 为：$1\le y\le u$，$y\le x\le u$

（1） $F(u)=\iint\limits_{D} f(x)d\sigma=\int_1^u dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^u (x-1)f(x)dx$；

（2） $F'(u)=(u-1)f(u)$， $F'(2)=(2-1)f(2)=f(2)=1$.

2006 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、C　2、B　3、C　4、C　5、C　6、A　7、2　8、$f(x_0)$　9、-1　10、1

11、 $e^{xy}(y\sin x+\cos x)$　　12、1

13、原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{2}{3}$

14、 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(\frac{dy}{dx})'}{x_t'}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}$

15、原式 $=\int\sqrt{1+\ln x}\,d(1+\ln x)=\dfrac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$

16、原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2 d\sin x=x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=\dfrac{\pi^2}{4}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\cos x$

$=\dfrac{\pi^2}{4}+2x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\dfrac{\pi^2}{4}-2$

17、方程变形为 $y'=\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$，令 $p=\dfrac{y}{x}$ 则 $y'=p+xp'$，代入得： $xp'=-p^2$，分离变量得：

$-\int\dfrac{1}{p^2}dp=\int\dfrac{1}{x}dx$，故 $\dfrac{1}{p}=\ln|x|+C$， $y=\dfrac{x}{\ln|x|+C}$.

18、令 $g(x)=\ln(1+x)$， $g(0)=0$， $g'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+2}$，

故 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+2}$， $-1<x\le 1$.

19、$\vec{n_1}\{1,-1,1\}$、$\vec{n_2}\{4,-3,1\}$，$\vec{l}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{vmatrix}=2i+3j+k$

直线方程为 $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$.

20、$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2 f_2'$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2xf_2'+x^2(f_{21}''\cdot 2x+f_{22}''\cdot y)=2xf_2'+2x^3f_{21}''+x^2yf_{22}''$.

21、令 $f(x)=3x-x^3$，$x\in[-2,2]$，$f'(x)=3-3x^2=0$，$x=\pm1$，$f(-1)=-2$，$f(1)=2$，

$f(2)=-2$，$f(-2)=2$；所以 $f_{min}=-2$，$f_{max}=2$，故 $-2\le f(x)\le 2$，即 $3x-x^3\le 2$.

22、$y'=2x+y$，$y(0)=0$

通解为 $y=(-2x-2)+Ce^x$，由 $y(0)=0$ 得 $C=2$，故 $y=-2x-2+2e^x$.

23、（1）$S=\int_{-2}^{2}(8-x^2-x^2)dx=\frac{64}{3}$

（2）$V=\pi\int_0^4(\sqrt{y})^2dy+\pi\int_4^8(\sqrt{8-y})^2dy=16\pi$

24、$\iint\limits_{D_t} f(x)dxdy=\int_0^t dx\int_0^t f(x)dy=t\int_0^t f(x)dx$

$g(t)=\begin{cases}\int_0^t f(x) & t\neq0\\ a & t=0\end{cases}$

（1）$\lim\limits_{t\to0}(\ )=\lim\limits_{t\to0}\int_0^t f(\ )=0$，由 $g(t)$ 的连续性可知 $a=g(0)=\lim\limits_{t\to0}(\ )=0$

（2）当 $t\neq0$ 时，$g'(t)=f(t)$，

当 $t=0$ 时，$g'(0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\int_0^h f(x)dx}{h}=\lim\limits_{h\to0}f(h)=f(0)$

综上，$g'(t)=f(t)$.

2007 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、B　2、C　3、C　4、A　5、D　6、D　7、$\ln 2$　8、1　9、2π　10、$\frac{\sqrt{3}}{2}$

11、$\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$　　12、$y'' - 5y' + 6y = 0$

13、解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$.

14、解：方程 $e^x - e^y = xy$，两边对 x 求导数得 $e^x - e^y \cdot y' = y + xy'$，故 $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}$.

又当 $x = 0$ 时，$y = 0$，故 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 1$、$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = -2$.

15、解：$\int x^2 e^{-x}dx = -\int x^2 d(e^{-x}) = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx = -x^2 e^{-x} - 2\int x d(e^{-x})$

$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$.

16、解：令 $x = \sin t$，则 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = 1 - \frac{\pi}{4}$

17、解：$\frac{\partial z}{\partial x} = 2f_1' + yf_2'$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 2(f_{11}''\cdot 3 + f_{12}''\cdot x) + f_2' + y(f_{21}''\cdot 3 + f_{22}''\cdot x)$

$= 6f_{11}'' + (2x + 3y)f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2'$

18、解：原方程可化为 $y' - \frac{1}{x}y = 2007x$，相应的齐次方程 $y' - \frac{1}{x}y = 0$ 的通解为 $y = Cx$.可设原方程的通解为 $y = C(x)x$.将其代入方程得 $C'(x)x + C(x) - C(x) = 2007x$，所以 $C'(x) = 2007$，从而

$C(x) = 2007x + C$，故原方程的通解为 $y = (2007x + C)x$.又 $y(1) = 2008$，所以 $C = 1$，于是所求特解为 $y = (2007x + 1)x$.（本题有多种解法，大家不妨尝试一下）

19、解：由题意，所求平面的法向量可取为

$$\vec{n} = (1,1,1)\times(2,-1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,1,-3).$$

故所求平面方程为 $2(x-1) + (y-2) - 3(x-3) = 0$，即 $2x + y - 3z + 5 = 0$.

20、解：$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \rho^2 d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta = \frac{16}{9}$.

21、解：（1） $V=\int_0^1 \pi(1-x^2)^2dx=\frac{8\pi}{15}$；

（2）由题意得 $\int_0^a (1-y)^{\frac{1}{2}}dy=\int_a^1 (1-y)^{\frac{1}{2}}dy$．由此得 $(1-a)^{\frac{3}{2}}=1-(1-a)^{\frac{3}{2}}$．解得 $a=1-(\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}$．

22、解：$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$．

由题意得 $f'(-1)=0$、$f''(1)=0$、$f(1)=2$，解得 $a=-1$、$b=3$、$c=9$

23、证明：积分域 $D:\begin{cases}a\le y\le b\\ y\le x\le b\end{cases}$，积分域又可表示成 $D:\begin{cases}a\le x\le b\\ a\le y\le x\end{cases}$

$$\int_a^b dy\int_y^b f(x)e^{2x+y}dx=\iint_D f(x)e^{2x+y}=\int_a^b dx\int_a^x f(x)e^{2x+y}dy=\int_a^b f(x)e^{2x}dx\int_a^x e^{y}dy$$

$$=\int_a^b f(x)e^{2x}(e^x-e^a)dx=\int_a^b (e^{3x}-e^{2x+a})f(x)dx.$$

24、证明：令 $F(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$，显然，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续．由于 $F'(x)=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$，

故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

于是，当 $0<x<1$ 时，$F(x)<F(1)=0$，即 $\ln x<\frac{x-1}{x+1}$，又 $x^2-1<0$，故 $(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$；

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)\ge F(1)=0$，即 $\ln x\ge\frac{x-1}{x+1}$，又 $x^2-1\ge 0$，故 $(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$．

综上所述，当 $x>0$ 时，总有 $(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$．

2008 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、B 2、A 3、D 4、C 5、A 6、B 7、0 8、3 9、（2，17）

10、$-\cos x+\frac{1}{2}x+c$ 11、π 12、$[-2,2]$

13、$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-2}{x})^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{-\frac{x}{2}\cdot(-6)}$，令 $y=-\frac{x}{2}$，那么

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x-2}{x})^{3x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{y\cdot(-6)}=e^{-6}.$$

14、$y'(t)=\sin t$，$x'(t)=1-\cos t$，$y''(t)=\cos t$，$x''(t)=\sin t$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}=\frac{-1}{(1-\cos t)^2}.$$

15、$$\int\frac{x^3}{x+1}dx=\int\frac{x^3+1}{x+1}dx-\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\int(x^2-x+1)dx-\ln|x+1|+C$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C.$$

16、$$\int_0^1 e^{x^{\frac12}}dx=\int_0^1 e^{x^{\frac12}}d(x^{\frac12})^2=2\int_0^1 e^{x^{\frac12}}x^{\frac12}dx^{\frac12}=2\int_0^1 x^{\frac12}de^{x^{\frac12}}=2\left(x^{\frac12}e^{x^{\frac12}}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{x^{\frac12}}dx^{\frac12}\right)$$

$$=2e-2\int_0^1 e^{x^{\frac12}}dx^{\frac12}=2e-2e^{x^{\frac12}}\Big|_0^1=2e-2e+2=2.$$

17、由题意得：$\overrightarrow{AB}=(-2，3，0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,0,5)$，那么法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}3&0\\0&5\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}-2&-2\\0&5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&-2\\3&0\end{vmatrix}\right)=(15,10,6).$$

18、$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'-\frac{y}{x^2}f_2',\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''-\frac{y}{x^2}\left(f_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right)$$

$$=f_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}f_{21}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''$$

19、$$\iint_D x^2dxdy=\int_0^1dx\int_0^x x^2dy+\int_1^2dx\int_0^{\frac1x}x^2dy$$

$$=\int_0^1x^3dx+\int_1^2xdx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac14+\frac32=\frac74$$

20、积分因子为 $\mu(x)=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=e^{\ln|x|^{-2}}=\frac{1}{x^2}$.

化简原方程 $xy'=2y+x^2$ 为 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=x$.

在方程两边同乘以积分因子 $\frac{1}{x^2}$，得到 $\frac{dy}{x^2dx}-\frac{2y}{x^3}=\frac{1}{x}$.

化简得：$\frac{d(x^{-2}y)}{dx}=\frac{1}{x}$.

等式两边积分得到通解 $\int \frac{d(x^{-2}y)}{dx} = \int \frac{1}{x}dx.$

故通解为 $y = x^2 \ln|x| + x^2 C$

21、令 $F(x,y) = \frac{1}{x} - y$，那么 x 和 y 的偏导分别为 $F_x(x_0,y_0) = -\frac{1}{x_0^2}$，$F_y(x_0,y_0) = -1$

所以过曲线上任一点 (x_0,y_0) 的切线方程为：$\frac{x-x_0}{x_0^2} + \frac{y-y_0}{1} = 0.$

当 X＝0 时，y 轴上的截距为 $y = \frac{1}{x_0} + y_0$.

当 y＝o 时，x 轴上的截距为 $x = x_0^2 y_0 + x_0$.

令 $F(x_0,y_0) = \frac{1}{x_0} + y_0 + x_0^2 y_0 + x_0$，那么即是求 $F(x_0,y_0)$ 的最小值.

而 $F(x_0,y_0) = \frac{1}{x_0} + x_0 + \frac{1}{x_0} + x_0 = 2(\frac{1}{x_0} + x_0) \ge 4$，故当 $x_0 = y_0 = 1$ 时，取到最小值 4.

22、(1) $V = \pi\int_0^1 (4x^4 - x^4)dx = \frac{3\pi x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{5}$.

(2) 由题意得到等式：$\int_0^a (2x^2 - x^2)dx = \int_a^1 (2x^2 - x^2)dx$

化简得：$\int_0^a x^2 dx = \int_a^1 x^2 dx.$

解出 a，得到：$a^3 = \frac{1}{2}$，故 $a = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$.

23、令 $g(x) = f(x+a) - f(x)$，那么 $g(a) = f(2a) - f(a)$，$g(0) = f(a) - f(0).$

由于 $g(a)g(0) < 0$，并且 $g(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续.

故存在 $\xi \in (0, a)$，使得 $g(\xi) = 0$，即 $f(\xi) = f(\xi + a)$.

24、将 e^x 用泰勒公式展开得到：$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$

代入不等式左边：$(1-x)e^x = (1-x)(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots \le 1$

2009 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、A　2、B　3、C　4、B　5、D　6、C　7、$\ln 2$　8、$4xe^{2x}$

9、$\dfrac{\pi}{3}$　10、$-\dfrac{z^2}{2xz+y}$　11、2　12、$\ln|x|+\dfrac{1}{2}x^2=2\ln|y|-y+C$

13、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\cos x}=6$．

14、$dx=\dfrac{1}{1+t}dt$，$dy=(2t+2)dt$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2t+2)dt}{\dfrac{1}{1+t}dt}=2(t+1)^2$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{4(t+1)dt}{\frac{1}{1+t}dt}=4(t+1)^2.$$

15、令 $\sqrt{2x+1}=t$，$x=\dfrac{t^2-1}{2}$，$\int\sin\sqrt{2x+1}\,dx=\int\sin t\cdot t\,dt=-\int t\,d\cos t=-t\cos t+\int\cos t\,dt$

$$=-t\cos t+\sin t+C=-\sqrt{2x+1}\cos\sqrt{2x+1}+\sin\sqrt{2x+1}+C$$

16、令 $x=\sqrt{2}\sin\theta$，当 $x=0,\theta=0$；当 $x=1,\theta=\dfrac{\pi}{4}$．

$$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin^2\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

17、已知直线的方向向量为 $\vec{s}_0=(3,2,1)$，平面的法向量为 $\vec{n}_0=(1,1,1)$．由题意，所求平面的法向量可取为 $\vec{n}=\vec{s}_0\times\vec{n}_0=(3,2,1)\times(1,1,1)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1,-2,1)$．又显然点 $(0,1,2)$ 在所求平面上，故所求平面方程为 $1(x-1)+(-2)(y-1)+1(z-2)=0$，即 $x-2y+z=0$．

18、$\iint\limits_D y\,d\sigma=\iint\limits_D\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta}\rho^2\,d\rho=\dfrac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(8\csc^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta)\,d\theta$

$$=\frac{1}{3}\left(-8\cot\theta+2\sqrt{2}\cos\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2$$

19、$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot \cos x + f_2' \cdot y$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_2' + x\cos x \cdot f_{12}'' + xyf_{22}''$

20、积分因子为 $\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{\ln|x|^{-2}} = \frac{1}{x^2}$.

化简原方程 $xy' = 2y + x^2$ 为 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x$.

在方程两边同乘以积分因子 $\frac{1}{x^2}$，得到 $\frac{dy}{x^2 dx} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x}$.

化简得：$\frac{d(x^{-2}y)}{dx} = \frac{1}{x}$.

等式两边积分得到通解 $\int \frac{d(x^{-2}y)}{dx} = \int \frac{1}{x}dx$.

故通解为 $y = x^2\ln|x| + x^2 C$

21、（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f'(x) = 3x^2 - 3$，令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm 1$，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -1]$，$[1, +\infty)$，单调减区间为 $[-1, 1]$，极大值为 $f(-1) = 3$，极小值为 $f(1) = -1$.

（2）$f''(x) = 6x$，令 $f''(x) = 0$，得 $x = 0$，曲线 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是凸的，在 $[0, +\infty)$ 上是凹的，点 $(0, 1)$ 为拐点.

（3）由于 $f(-1) = 3$，$f(1) = -1$，$f(3) = 19$，故函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-2, 3]$ 上的最大值为 $f(3) = 19$，最小值为 $f(1) = f(-2) = -1$.

22、（1）$V_1 = \pi a^2 \cdot 2a^2 - \int_0^{2a^2} \pi x^2 dy = \pi a^4$. $V_2 = \int_a^2 \pi(2x^2)^2 dy = \frac{4}{5}\pi(32 - a^5)$.

（2）$A_1 = \int_0^a 2x^2 dx = \frac{2}{3}a^3$. $A_2 = \int_a^2 2x^2 dx = \frac{2}{3}(8 - a^3)$. 由 $A_1 = A_2$ 得 $a = \sqrt[3]{4}$.

23、证（1）因为 $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-x} = 1$，$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x + 1) = 1$，且 $f(0) = 1$，所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

（2）因为 $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$，$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + 1 - 1}{x} = 1$，所以 $f'_-(0) = -1$，$f'_+(0) = 1$. 由于 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

24、证 令 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$，则 $f'(x)=4\ln x-2x+2$，$f''(x)=\frac{4}{x}-2=\frac{4-2x}{x}$，

由于当 $1<x<2$ 时，$f''(x)>0$，故函数 $f'(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调增加，从而当 $1<x<2$ 时

$f'(x)>f'(1)=0$，于是函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调增加，从而当 $1<x<2$ 时，$f(x)>f(1)=0$，

即当 $1<x<2$ 时，$4x\ln x>x^2+2x-3$

2010 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、A　2、C　3、B　4、D　5、D　6、C

7、e^2　8、2　9、$\frac{\pi}{2}$　10、-4　11、$dx+2dy$　12、$(-1,1]$

13、原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$.

14、$\frac{dy}{dx}+e^{x+y}(1+\frac{dy}{dx})=2$，$\frac{dy}{dx}=\frac{2-e^{x+y}}{1+e^{x+y}}$；$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{9e^{x+y}}{(1+e^{x+y})^3}$

15、原式 $=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$.

16、变量替换：令 $\sqrt{2x+1}=t$，$x=\frac{t^2-1}{2}$，$dx=tdt$，

原式 $=\int_1^3\frac{\frac{t^2-1}{2}+3}{t}\,t\,dt=\int_1^3(\frac{t^2}{2}+\frac{5}{2})\,dt=(\frac{1}{6}t^3+\frac{5}{2}t)\Big|_1^3=\frac{28}{3}$

17、$\vec{n}_1=(1,2,3)$，$\vec{n}_2=(2,0,-1)$，$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-2,7,-4)$，

所求直线方程为 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-1}{-4}$

18、$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(f_1'y+f_2'e^x)$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3y^2f_1'+2e^xyf_2'+xy^3f_{11}''+xy^2e^xf_{12}''$

19、$\iint\limits_D x\,dxdy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}x\,dx=\frac{\sqrt{2}}{6}$

20、特征方程的两个根为 $r_1=1,r_2=-2$，特征方程为 $r^2+r-2=0$，从而 $p=1,q=-2$；

$\omega=1$ 是特征方程的单根，$p(x)=1$，可设 $Q(x)=Ax$，即设特解为 $Y=Axe^x$，

$Y'=Ae^x+Axe^x$，$Y''=2Ae^x+Axe^x$，$p=1,q=-2$，代入方程 $y''+py'+qy=e^x$ 得

$(2A+Ax+A+Ax-2A)e^x=e^x$，$3A=1,A=\frac{1}{3}$，通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{1}{3}x$

21、构造函数 $f(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$，$f'(x)=e^{x-1}-x$，$f''(x)=e^{x-1}-1>0$，$f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$f'(1)=0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$f(1)=0$，$f(x)>0$，即 $e^{x-1}>\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$。

22、$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\varphi'(0)=1=f(0)$，连续性得证；

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\varphi(x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x-0}$$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\varphi''(x)=\frac{1}{2}\varphi''(0)$，可导性得证。

23、$V_1(a)=\pi\int_0^a[(a^2)^2-(x^2)^2]dx=\frac{4}{5}\pi a^5$，

$V_2(a)=\pi\int_a^1[(x^2)^2-(a^2)^2]dx=(\frac{1}{5}-a^4+\frac{4}{5}a^5)\pi$，

$V(a)=V_1(a)+V_2(a)=(\frac{1}{5}-a^4+\frac{8}{5}a^5)\pi$，

$V'(a)=(8a^4-4a^3)\pi$，令 $V'(a)=0$ 得 $a=\frac{1}{2}$，最小值为 $V(\frac{1}{2})=\frac{3}{16}\pi$

24、$f(x)=e^{-\int dx}(\int 2e^xe^{\int dx}dx+C)=e^{-x}(e^{2x}+C)=e^x+Ce^{-x}$，

$f(0)=2, C=1$，$f(x)=e^x+e^{-x}$，$f'(x)=e^x-e^{-x}$，

$$y=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^{2x}+1-2}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}，$$

$$A(t)=\int_0^t(1-(1-\frac{2}{e^{2x}+1}))dx=\int_0^t\frac{2}{e^{2x}+1}dx=\int_0^t\frac{e^{2x}+1-e^{2x}}{e^{2x}+1}d2x=\int_0^t 1-\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}d2x$$

$$=2t-\int_0^t\frac{1}{e^{2x}+1}d(e^{2x}+1)=2t-\ln(e^{2t}+1)+\ln 2=\ln e^{2t}-\ln(e^{2t}+1)+\ln 2=\ln\frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}+\ln 2$$

从而 $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(\ln\frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}+\ln 2)=\ln 2$