山东省 2020 年专升本真题

回忆版高等数学(一)

一、单项选择题

1．当 $x \to 0$ 时，以下函数是无穷小量的是

A．e^x　　B．$\ln(x+2)$　　C．$sinx$　　D．$cosx$

2．平面 $2x-3y+4z=8$ 与与直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{4}$的位置关系是

A．平行　　B．垂直　　C．相交但不垂直　　D．直线在平面上

3．微分方程 $y''+7y'-8y=0$ 的通解为

A．$y=C_1e^{-x}+C_2e^{8x}$　　B．$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-8x}$

C．$y=C_1e^{x}+C_2e^{8x}$　　D．$y=C_1e^{x}+C_2e^{-8x}$

4．曲线 $y=2x^3+3x^2-1$ 的拐点是

A．$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$　　B．$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　C．$(-1,0)$　　D．$(0,-1)$

5．以下级数收敛的为

A．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^3+2n^2}$　　B．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{3}$　　C．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$　　D．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n^2+1}$

二、填空题

6．函数 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{3}-1}$的定义域为____________．

7．曲线 $y=\frac{1}{x}+2\ln x$在点(1,1)点处的切线方程为____________．

8．若$\int_a^b f(x)dx=1$，$\int_a^b[2f(x)+3g(x)]dx=8$，则$\int_a^b g(x)dx=$____________．

9．已知两点 $A(-1,2,0)$和 $B(2,-3,\sqrt{2})$,则与向量 AB 同方向的单位向量为 ____________．

10． 已知函数 $f(x,y)$在 R 上连续，设 $I=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x}}f(x,y)dy+\int_1^2dx\int_0^{2-x}f(x,y)dy$，则交换积分顺序后 $I=$____________．

三、解答题

11．求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2}{x^2+x+2}-x$

12． 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2\,dt}{x^3}$

13．求不定积分$\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$

14．求过点$(1,-2,2)$且与两平面 $x+2y-z=1$ 和 $2x+y+3z=2$ 都垂直的平面方程.

15．已知函数 $z=x\sin\frac{y}{x}$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

16．计算二重积分$\iint_D cos(x^2+y^2)dxdy$, 其中 D 是由直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x, y=\sqrt{3}x$ 与圆$x^2+y^2=\frac{\pi}{2}$所围成的第一象限的闭区域．

17．求微分方程$y'+y=e^x+x$ 的通解．

18． 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1}$的收敛域及和函数．

19．求曲线 $y=-x^2+4$ 与直线 $y=-2x+4$ 所围成图形的面积．

20．证明：当 $x > 1$ 时，$x + \ln x > 4\sqrt{x} - 3$.

21．设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(1) = 1$，证明：对于任意$\lambda \in (0,1)$，存在$\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = \frac{\lambda}{\xi^2}$.

山东省 2020 年专升本真题

高等数学（一）答案解析

一、单项选择题

1．当 $x\to 0$ 时，以下函数是无穷小量的是

A．e^x　　B．$\ln(x+2)$　　C．$sinx$　　D．$cosx$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

【考点】无穷小的定义；等价无穷小

【答案】C

2．平面 $2x-3y+4z=8$ 与与直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{4}$的位置关系是

A．平行　　B．垂直　　C．相交但不垂直　　D．直线在平面上

【解析】直线的方向向量$(2,-3,4)$和平面的法向量一致，故垂直

直线过$(1,-2,0)$，带入平面方程等式成立，点在平面内，故相交

【考点】平面与直线的位置关系

【答案】B

3．微分方程 $y''+7y'-8y=0$ 的通解为

A．$y=C_1e^{-x}+C_2e^{8x}$　　B．$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-8x}$

C．$y=C_1e^{x}+C_2e^{8x}$　　D．$y=C_1e^{x}+C_2e^{-8x}$

【解析】$r^2+7r-8=0\Rightarrow r=1,r=-8$

【考点】齐次微分方程通解

【答案】D

4．曲线 $y=2x^3+3x^2-1$ 的拐点是

A．$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$　　B．$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　C．$(-1,0)$　　D．$(0,-1)$

【解析】$y'=6x^2+6x$；$y''=12x+6=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$，$y=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}$

【考点】拐点的计算

【答案】A

5．以下级数收敛的为

A．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^3+2n^2}$　　B．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{3}$　　C．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$　　D．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n^2+1}$

【解析】排除法：通项趋于 $0(n\to\infty)$

AC 符合，BD 不符合；而 A：$\frac{n^2-1}{n^3+2n^2}\sim\frac{1}{n}$，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散知 A 发散；故选 C

【考点】级数的敛散性

【答案】C

二、填空题

6．函数 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{3}-1}$的定义域为____________．

【解析】$\frac{x}{3}-1\geq 0\Rightarrow x\geq 3$

【考点】定义域

【答案】$[3,+\infty)$

7．曲线 $y=\frac{1}{x}+2\ln x$在点$(1,1)$点处的切线方程为____________．

【解析】$y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{2x-1}{x^2}$，$y'|_{x=1}=1$，切线：$(y-1)=1\cdot(x-1)\Rightarrow y=x$

【考点】曲线在一点切线方程

【答案】$y=x$

8．若$\int_a^b f(x)dx=1$，$\int_a^b[2f(x)+3g(x)]dx=8$，则$\int_a^b g(x)dx=$____________．

【解析】$\int_a^b[2f(x)+3g(x)]dx=2+3\int_a^b g(x)dx=8$，则$\int_a^b g(x)dx=2$

【考点】定积分的性质

【答案】2

9．已知两点 $A(-1,2,0)$和 $B(2,-3,\sqrt{2})$,则与向量 AB 同方向的单位向量为 ____________．

【解析】$\overrightarrow{AB}=(3,-5,\sqrt{2})$，$3^2+(-5)^2+(\sqrt{2})^2=36$

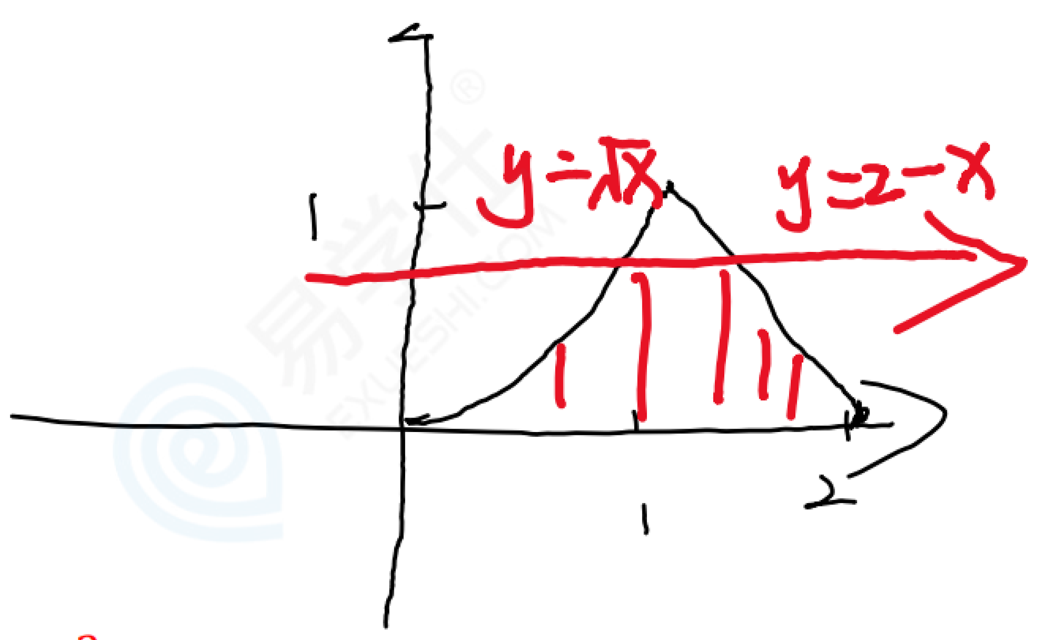
单位化：$\left(\frac{3}{6},-\frac{5}{6},\frac{\sqrt{2}}{6}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{6},\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$

【考点】向量的表达；单位化

【答案】$\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{6},\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$

10． 已知函数 $f(x,y)$在 R 上连续，设 $I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$，则交换积分顺序后 $I=$____________．

【解析】



$y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^2$;$y=2-x\Rightarrow x=2-y$

【考点】二重积分

【答案】$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)dx$

三、解答题

11．求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2}{x^2+x+2}-x$

【解析】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2}{x^2+x+2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x}{x^2+x+2}=2$$

12． 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^2\,dt}{x^3}$

【解析】

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^2\,dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

13．求不定积分$\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$

【解析】

$$\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{\ln x}{x}dx=2\sqrt{x}+\int lnxdlnx=2\sqrt{x}+\frac{1}{2}(lnx)^2+C$$

14．求过点$(1,-2,2)$且与两平面$x+2y-z=1$和$2x+y+3z=2$都垂直的平面方程.

【解析】

该平面法向量为$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=(7,-5,-3)$

该平面方程为$7(x-1)-5(y+2)-3(z-2)=0$，化简：$7x-5y-3z=11$

15．已知函数$z=x\sin\frac{y}{x}$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$$

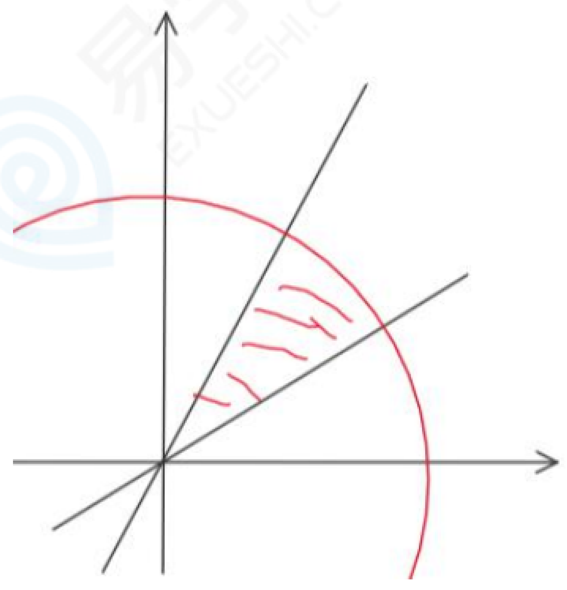
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}=\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}$$

16．计算二重积分$\iint_D cos(x^2+y^2)dxdy$, 其中 D 是由直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x, y=\sqrt{3}x$ 与圆$x^2+y^2=\frac{\pi}{2}$所围成的第一象限的闭区域．

【解析】

$$\iint\limits_D ycos(x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\cos r^2\cdot rdr=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\cos r^2\,dr^2=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\sin r^2|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}$$



17．求微分方程$y^{'}+y=e^x+x$ 的通解．

【解析】

设 $p(x)=1$，$q(x)=e^x+x$

则 $y=e^{-\int 1dx}[C+\int(e^x+x)e^{\int 1dx}dx]$

$=e^{-x}[C+\int(e^x+x)e^xdx]$

$=e^{-x}[C+\int(e^x+x)de^x]$

$=e^{-x}\left[C+\frac{1}{2}e^{2x}+xe^x-e^x\right]$

$=Ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x+x-1$

18． 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1}$的收敛域及和函数．

【解析】

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+3}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^{n+2}}\right|=|x|<1$

$x=1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散

$x=-1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$收敛

收敛域为$[-1,1)$

(2) 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

记$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$，则 $S(x)=xS_1(x)$

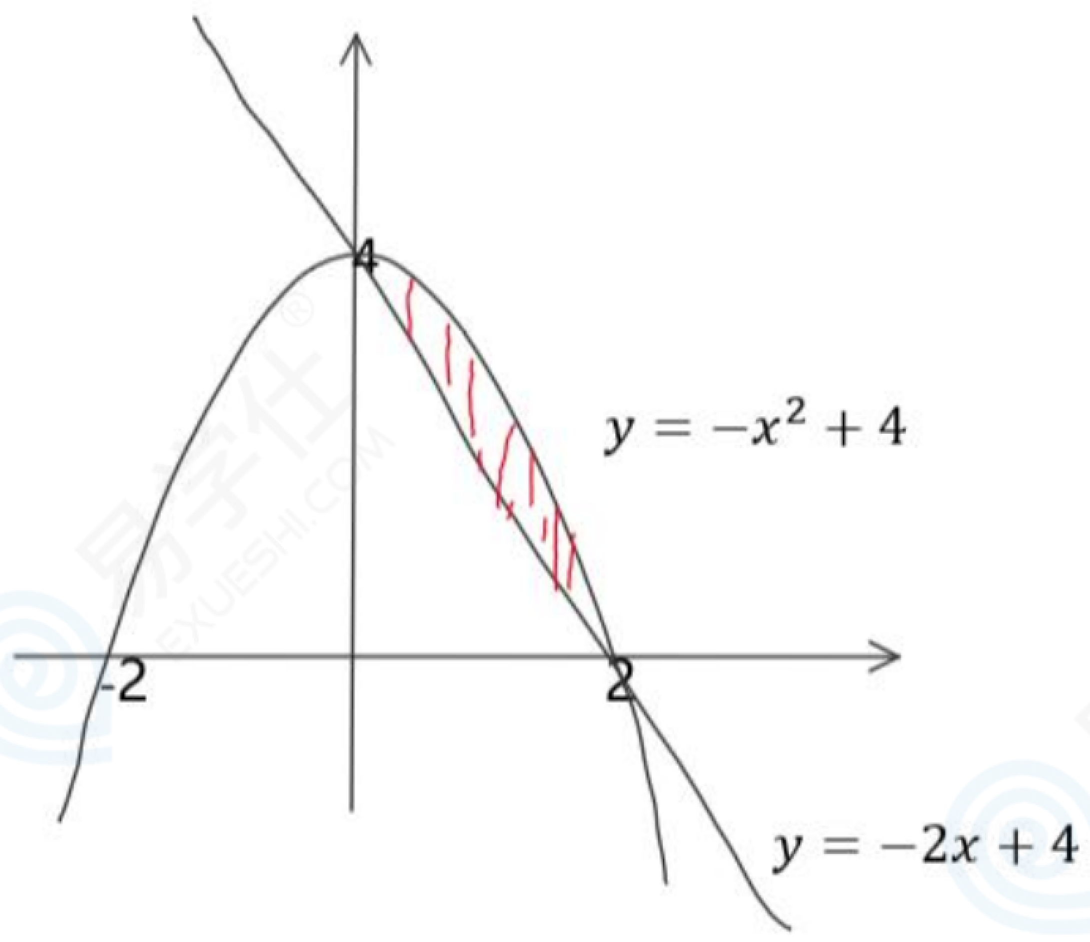
$$S_1^{'(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{1}{1-x}$$

$$S_1(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$$

$$S(x)=-x\ln(1-x)$$

19．求曲线 $y=-x^2+4$ 与直线 $y=-2x+4$ 所围成图形的面积．

【解析】画图象；



$$S=\int_0^2(-x^2+4)-(-2x+4)\,dx$$

$$=\int_0^2(-x^2+2x)\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_0^2$$

$$=\frac{4}{3}$$

20．证明：当 $x>1$ 时，$x+\ln x>4\sqrt{x}-3$.

【解析】

设 $F(x)=x+\ln x-4\sqrt{x}+3$

$$F'(x)=1+\frac{1}{x}-2\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{x}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$$

$x=1$ 时$F'(x)=0$，$F(x)=0$

$x>1$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增

故 $x > 1$ 时，$F(x) > 0$，即 $x + \ln x > 4\sqrt{x} - 3$

21．设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(1) = 1$，证明：对于任意$\lambda \in (0,1)$，存在$\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = \frac{\lambda}{\xi^2}$.

【解析】

由结论处 $f(\xi) = \frac{\lambda}{\xi^2}$提示可设 $F(x) = x^2 f(x) - \lambda$，则 $F(x)$在$[0,1]$上连续

且 $F(0) = -\lambda < 0$，$F(1) = 1 - \lambda > 0$，$(0 < \lambda < 1)$

则 $F(0) \cdot F(1) < 0$，

由零点定理，至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使得 $F(\xi) = 0$，即 $f(\xi) = \frac{\lambda}{\xi^2}$